

日常事象を数学化する資質・能力を育成する教材開発と実践

－「方程式の利用」に焦点を当てて－

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育 三嶋悠人

1. はじめに

1.1. 研究動機

近年の全国学力・学習状況調査によると、数学において事象を数学的に解釈し、問題解決を行うことが課題とされている。平成30年度の全国学力状況調査報告書(文部科学省, 2018)では課題等として以下のように述べられている。

(B) 事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することに課題がある

(p.8)

直近の令和6年度の調査報告書でも、この課題は引き続き指摘されている。

また、学習指導要領の改訂に伴い、問題解決型の授業を行うことが求められており、そのためには授業に算数・数学の問題発見・解決の過程を反映させることが肝要である。しかし、実際の授業においては生徒たちが自ら各領域に関わる問題を発見することは難しく、教師が提示する問題場面を解決することが多いという現状がある。そのため、一時間の授業においては教師が提示する問題場面の質が、生徒の後の数学的活動の質を左右することとなる。つまり教師が提示する問題場面の質を向上させることで、生徒の数学的活動を豊かにし、資質・能力の育成へとつながると言える。

そのため、日常事象を扱う代表的な分野である「方程式の利用」の分野での資質・能力を育成することが肝要であると考えた。「方程式の利用」の分野での資質・能力を育成することで、後の二元一次方程式等での日常事象の解釈の改善につながる。よって、「方程式の利用」に焦点を当てた教材開発を行いたいと考えた。

1.2. 研究背景

問題の焦点化にあたって、タスクデザイン(課題設計)の考え方に着目した。中でも設計する課題に原理を設定するという特徴を持つ、小松(2023)の「学校数学における課題設計原理の開発に関する研究の枠組み」の考え方を援用することとした。

小松(2023)は原理を設定する理由として、内容・活動固有性と理論性・実証性を挙げている。それぞれの理由として、課題とは特定の学習内容や活動に焦点をあてたものであり、それを洗練するために必要であると述べている。図1は原理を基にした問題の例である。

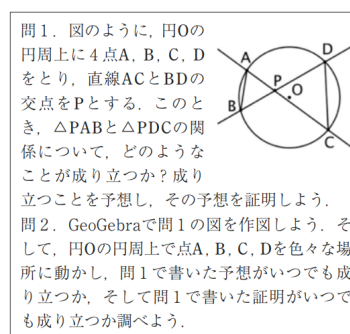


図1 原理を基にした問題の例

また、課題を設計する際に原理を設定することで、授業の評価を行う際原理に立ち返って評価を行うことができるようになり、課題の洗練や多くの課題を設計することに繋がる意義があると述べている。

そのため、日常事象を数学化する活動に焦点を当てた課題を設計することで原理を基に多くの場面で実践することが期待できるのではないかと考えた。

また、小松(2023)は研究の課題として以下のように述べている。

課題設計原理の開発に関する研究の妥当性をいかに評価するかが課題である。(p.9)

原理の評価については、目標が達成されなかった場合の原因として、設定した原理自体、教師の力量、対象生徒の既習知識等が考えられるとしている。つまり、要因に応じて原理を修正する必要性が変化するとしていることが分かる。

そのため、課題設計原理の評価の方法について授業実践の分析を行い、評価の仕方に関して一例を示すことが必要であると考えた。

1.3. 研究目的

上記の動機や背景を踏まえて、本研究では開発した教材を用いた授業実践や、アンケート調査などから、課題設計原理の開発方法や原理の評価の仕方について例証することを目的とした。

2. 研究方法

2.1 対象児童

本研究の対象児童は K 市立 H 中学校第一学年の生徒で、調査において欠損なくデータを収集できた生徒のみを対象とした。その理由は、生徒の事前・事後の変容についての分析を併せて行うためである。

2.2 実践方法

まず、帰納・演繹の両方からアプローチし、課題設計原理を設定する。次に、設定した原理を基に問題場面となる教材開発を行い、授業実践を行う。そして、行った授業実践から本研究の教材開発方法と設計した課題設計原理の評価を行う。

2.3 評価の方法

まず、事前／事後アンケートを基に、変容があった生徒にインタビュー調査を実施し、その内容を SCAT によって分析し、原理が目標に対して作用したのか評価する。また、授業動画からプロトコルを作成し、教師の働きかけについて評価する。

以上の二観点から、設計した課題設計原理と教師の働きかけの関連性について分析する。

3 授業実践の概要

3.1 実践する課題の設計

本節では、実際に実践する課題の設計方法および指導案での扱いについて述べる。課題設計原理の設定、教材開発を行うためのアプローチとして、以下の視点から段階的に考察を行い、課題設計原理を設定する。

STEP I, 内容・活動固有性

学習指導要領を基に領域固有な活動を定め目標を設定する

STEP II, 原理の仮設定

I を踏まえ作成した複数の問題場面の検討から、原理を帰納的に仮設定する

STEP III, 理論性・実証性

仮設定した原理を支える演繹的根拠を検討し、必要に応じて原理の再設定を行う

上記のステップを順番に行うことにより課題設計原理を設定する。また、設定した課題設計原理を基に問題場面となる教材開発を行う。

3.1.1 内容活動固有性

まずは扱う題材となる「方程式の利用」の分野において、領域固有な活動を学習指導要領から考察する。それを踏まえ、設計する課題の目標を定める。

学習指導要領において「方程式の利用」の分野は、第一学年の A(3)一元一次方程式の「イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身につけること」(文部科学省, 2017, p.71) に位置づいている。具体的な場面における問題を、方程式を活用して解決するためには、次のような一連の活動を行うことになる。

- ①求めたい数量に着目し、それを文字で表す。
- ②問題の中の数量やその関係から、二通りに表される数量を見だし、文字を用いた式や数で表す。
- ③それらを等号で結んで方程式をつくり、その方程式を解く。
- ④求めた解を問題に即して解釈し、問題の答えを求める。(p.72. p.73)

このことから、一元一次方程式を具体的な場面で活用する際には、上記のような一連の活動を行うことが分かる。これらの一連の活動は、一元一次方程式を具体的な場面で活用する際の領域固有な活動に当てはまると言える。

中でも、①と②の活動は、日常事象などの具体的な場面を、既習の方程式の形で表すために必要な活動であると言える。方程式を立ててしまえば、具体的な場面を離れて形式的に処理できる良さがあり、生徒たちにとって既習の範囲である方程式を用いて問題解決を行うことができる。また、これらの活動は生徒が初めて行う活動であり、既習知識を具体的な場面で活用する際に身につけるべき方法知である。また、これらの数学的に考える資質・能力は、日常事象などの具体的な場面を数学的に解釈する際に肝要な方法知である。

そのため、一元一次方程式を具体的な場面で活用する際に達成すべき目標は、①および②の活動と対応した思考力・判断力・表現力を養うことである。したがって、達成すべき目標を「求めたい数量を文字で表し、数量とその関係から文字を用いた式や数で表す方法知を身につけること」と定める。

3.1.2 原理の設定

次に、達成すべき目標のための指針となる原理を設定する。原理を設定するための方法として、複数の問題場面の比較検討を行う。複数の問題場面から原理を帰納的に導くことによって、より実践的な原理を設定することが出来るようになる。達成すべき目標に対し効果的である問題場面の共通点などから原理を帰納的に設定した。表1に設定した原理を示す。

表1 仮設定した原理

原理1	ことばを用いた式（フレーズ型）で数量の関係を表す問題場面を設ける
原理2	二種類の式の意味を説明する問題場面を設ける
原理3	条件の異なる問題場面を設ける

これらの原理が作用することで生徒に活動を促し、先に示した目標を達成することを期待する。特に、原理の1,2は、生徒が方程式の利用に対する方法知を生成することが出来るように、原理の3は、生成した方法知をより洗練・精緻化するために作用する。

3.1.3 理論性・実証性

最後に設定した原理を支える演繹的根拠となる先行研究を定め、より原理を理論的に作用するものとする。

原理1,2については、一元一次方程式の領域固有な活動に作用する活動を促進させるために設定されている。そこで、方程式の分野における先行研究から示唆を得ることにした。

三輪(1996)は、「文字式の指導序説」の中で、文字式指導についての提言を行っている。文字式を数学における主要な思考方法として位置づけ、その利用の図式からそれらの要素を考察している。三輪(1996)は図2のように思考の方法としての文字式利用の図式(scheme)を示している。

これによると、文字式の利用は点で表される3つの状態である「事象」、「文字式」、「文字式」と線で示される「表す」、「変形」、「読む」によって構成されていることがわかる。また、三輪(1996)はこの図式について、「数学的モデル化過程を90°回転させ、文字式の利用に表現しなおしたもの」と述べており、問題解決を行う際の文字

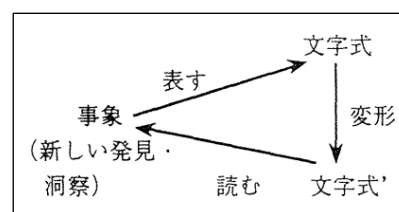


図2 三輪(1996)による文字式利用の図式

式の利用の仕方について改めて整理したものであるとわかる。

三輪(1996)は、先ほど示した「表す」の過程において以下のように提言している。

表す過程は、フレーズ型の式に表すことと、センテンス型の式に表すこととでかなり違

いがある。後者は、前者の基礎の上になされるので、まず、前者から始める。(p.4)

このことから、事象に含まれる数量や関係から式へ表すためには、まずフレーズ型の式で捉えることが肝要であることが示唆されている。

また、「読む」の過程においては以下のように述べている。

内容をつかんで一般化や特殊化をはかる。

これは、変形によって得られたことがらの内容を的確に把握することによってそれを一般化したり、あるいは、特殊化したりすることをいっている。(p.9)

したがって、「読む」の過程は一般化や特殊化をはかることにおいて肝要であるとわかる。また、論文内では特殊化の例として条件を変えた問題でも用いることが出来る文字式を見つけることが挙げられている。これは、方法知と類似しており、方法知を生成することを促すことに作用すると考察した。

これらの示唆から三輪(1996)の「文字式の指導序説」を原理 1,2 を支える演繹的根拠とした。また、宮崎ら(2017)は「領域固有なタスクデザイン」の中において以下のように述べている。

一般に、領域固有な方法知は学びの進行過程で不鮮明であり潜在的である。そのため、学びの過程や結果について振り返り、言語化を通して学びの進展を可能にした方法知を顕在化するとともに、思考と表現の往還を通して洗練・精緻化していくことが必要となる。(p.405)

このことから、方法知の生成においては言語化による顕在化が必要であることがわかる。また、思考と表現を往還することも必要で、それにより生成した方法知を洗練・精緻化していくことが出来る。つまり、各領域において自身の学びの過程や結果を振り返り生成した方法知を、繰り返しアップデートしていくことでより洗練していくことが望ましいとわかる。

また、方法知を洗練する例としてオープンな場面で証明する問題を取り上げている。つまり、

条件の異なる場面を解くことで、その一連の結果の変容から解決を可能にした方法知に着目することや、方法知を洗練・精緻化することが出来るとわかる。

以上の示唆を、原理 3 の演繹的根拠とし、言語化することを追加した。これにより設定された課題設計原理に対し、演繹的根拠を定め、以下のように設定した。(表 2)

表 2 設定した原理

原理 1	ことばを用いた式（フレーズ型）で数量の関係を表す問題場面を設ける
原理 2	二種類の式の意味を説明する問題場面を設ける
原理 3	条件の異なる設問から方法知を言語化する問題場面を設ける

上記の原理によって領域固有な方法知を生成し、それを洗練・精緻化する問題場面を設計することが可能となる。これらの原理を基に、授業で用いる問題場面を作成した。図 3 は、問題場面の設計の際に用いたフォーマットである。

3.2 授業実践

3.2.1 研究授業の概要

課題設計原理を基に作成した問題場面を指導案に落とし込み授業実践を行った。行った授業実践の詳細は以下のとおりである。

- ・実施日 令和 6 年 9 月 25 日(水)
- ・対象クラス 1-1, 1-2, 1-3 (各 1 時間)
- ・単元 「方程式の利用」
- ・本時の位置づけ
前時：身の回りの場面から問題を設定し、方程式を用いて問題解決を行うこと
次時：方程式の解が、問題に適しているか吟味すること
- ・本時の目標
「求めたい数量を文字で表し、数量とその関係から文字を用いた式や数で表す方法知を身につけること」
- ・生徒の様子
すべてのクラスにおいて、とても活発である。話し合い活動などを頻繁に行っている。

1, 学習目標の設定	2, 課題設計原理の設定			3, 課題の設計
学習目標	課題設計原理			設計した課題
	原理#	原理の要点	原理のねらい	設計した課題で期待する活動
【目標】 求めたい数量を文字で表し、数量とその関係から文字を用いた式や数で表す式や数で表す方法知を身につけること	原理1	ことばを用いた式（フレーズ型）で数量の関係を表す問題場面を設ける	ことばを用いた式を基に問題場面で求めたい数量を捉えることができるようにするため。	三輪(1996) 「文字式の指導序説」 (1) けいたさんは13歳、担任の先生は31歳です。この時、先生の年齢がけいたさんの年齢の二倍になるのは何年後ですか、方程式の両辺に当てはまることばを用いた式を答えなさい。
	原理2	二種類の式の意味を説明する場面を設ける	求めたい数量を文字で置いた際、 $ax+b$ や $cx+d$ が何を表しているか理解するため。	三輪(1996) 「文字式の指導序説」 (2) ① $4(13+x)$ と② $3(31+x)$ はどのような関係を表しているか説明しなさい。
	原理3	条件の異なる設問から方法知を言語化する問題場面を設ける	問題場面の条件に応じて数量の関係を基に等式を立式できるようにするため。	宮崎ら(2017) 「領域固有な方法知を生成しようとする態度を養うタスクデザイン」 (3) けいたさんの年齢を3倍、妹の年齢を4倍としたときの年齢が等しくなるのは何年後か。

図3 課題設計フォーマット

また、作成した問題場面を指導案の中に埋め込み授業実践を行った。図4は原理1を基にした指導案内の問題である。

現在、けいたさんは中学一年生で13歳です。けいたさんのクラスの担任の先生は31歳です。けいたさんは、先生の年齢がけいたさんの年齢の二倍になるのは何年後か気になるに考えすることにしました。

図4 指導案内の問題

実習の中で、実習生である筆者と中学一年生の年齢の差がよく話題となっていた。その実態を踏まえ、生徒たちの年齢と担任の先生の年齢の差を考えるとという事象を基に問題場面を作成した。そのため、生徒たちの日々の生活の中で話題となっていた日常事象を問題化し、方程式を用いて解決する授業を行った。

また、授業にあたってiPadを用いて授業の様子を撮影し、生徒の思考過程を見取れるようにワークシートを用いて授業を行った。

3.2.2 研究授業の実際

実際の研究授業の様子を示す。研究授業では、図5のけいたさんの年齢と担任の先生の年齢が二倍になるのは何年後かを求める問題に対して、 x 年後として方程式を立式することを意図した。この時、二倍になる時のけいたさんの年齢は $(13+x)$ 、担任の先生の年齢が $(31+x)$ で表される。この設問に対して、方程式の両辺に当てはまることばを用いた式（フレーズ型）は何かを発問した。その後、個人追究の時間を設けた。図5は、生徒のワークシートの一部である。

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
32	33	34	35	36	37	38	39	40	

図5 生徒のワークシート(1)

図5のように方程式を立式することが出来ず、表を用いて解答を得ている生徒が多く見受けられた。そのため、指導案に含まれていなかったが、全体検討において表を用いて解答を導く方法を

確認する時間を設けた。その後、改めて言葉の式について確認したところ生徒は、フレーズ型の言葉の式を用いて整理することが出来ていた。

図6 生徒のワークシート(2)

次に、原理2と対応する設問2を行い、先ほどの場面において $4(13+x)=3(31+x)$ は、どのような関係を表すかを説明する問題場面を設けた。その際の生徒の様子を見ると、とても活発に意見交換を行っていた。

その後、各ペア毎に出た意見を集約・確認したところで終了時間となってしまった。短縮授業であったことや、指導案には含まれていなかった表を用いた問題解決を行ったことが要因だと考えられる。

4 授業の分析と考察

4.1 分析

行った授業実践を分析する上で以下のデータを収集した。

- ・授業動画
- ・ワークシート
- ・事前/事後アンケート（自由記述）
- ・インタビュー調査

これらのデータを原理の評価と教師の発問の二観点から分析を行った。それを基に課題設計原理の成果と課題を見いだした。

4.1.1 原理の評価

一つ目の観点として、事前・事後アンケート、インタビュー調査を基に原理の評価を行った。

まず、事前・事後アンケート調査の結果から考察を行った。研究授業の事前・事後において、同

じ設問内容で自由記述式のアンケートを行い、生徒たちなりの方法知について記述してもらった。以下の表3は、回答してもらった方法知の種類別の回答数である。

表3 方法知の種類別回答数

分類	回答数 (事前)	回答数 (事後)
方程式を用いる(移項する)	10	12
求めたい数量を文字で置く	7	12
文章中の関係に着目する	4	5
図や表を使う	15	13
計算ミスをしない	7	2
ない	13	8
その他(諦めない等)	18	18

この結果から、「求めたい数量を文字で置くこと」と「文章中の関係に着目する」という授業の目標と対応した回答の数値がそれぞれ上昇した。このことから、原理が作用したと推察した。そのため、アンケートにおいて事前・事後で変容があった生徒の中から、無作為に抽出した3名に対して半構造化インタビュー調査を行った。

その半構造化インタビューを分析するにあたりSCATによる分析を用いた。大谷(2019)は「質的研究の考え方」の中で、SCATによる分析の特徴について以下のように述べている。

明示的で段階的な分析手続きを有する
比較的小規模のデータに適用可能である
初学者にもきわめて着手しやすい

(p. 271)

上記のような特徴を持っていることから今回の分析手法とした。紙幅の関係上、分析手続きの記載は行わない。行ったSCATによる分析において、理論記述の中で原理について評価しているものを以下に取り上げた。

- ・多様性の受容と評価によって、個人的な効率化・最適化が行われる。
- ・他者参照による多角的な視点が肝要である。

上記の結果から、原理2と対応する設問2が方法知の生成に作用したことが分かった。式の中の関係を説明しあうことで、ほかの生徒の考

えを参照して個々の方法知を効率的かつ最適なものにすることが出来たと分かった。また、方法知を生成するためには他者参照による多角的な視点があることで、潜在的に持っている方法知に確信を持つきっかけになったことも分かった。

したがって、原理2は方法知の生成に作用したといえる。

4.1.2 教師の働きかけ

二つ目の観点として教師の働きかけについて分析を行った。中でも、授業の導入場面の教師の発問について着目した。以下は導入場面における筆者と生徒たちとのやり取りである。

T6: みんなかけたかな? じゃあこの手の問題ってどうやって解いたらいいか何か案がある人います?

S2: 公倍数

S3: 図とか表

T10: あといっこんなかあったと思うんだけど、何だっけ?

S5: 方程式

T13: 方程式、そうだね

T15: 方程式ってどんな形の式だったか覚えている?

S8: イコールで結ばれてる

T23: 左辺と右辺が等しいですよっていうのを式に表しているのが方程式だったね
(一部省略)

導入場面では、原理の設定意図に合う形で問題解決を行うように仕向けてしまった。理由として、生徒たちの中で問題解決のための方法に、方程式を用いるという選択肢が位置づいていなかったことも挙げられる。方程式の活用を促すことを優先しすぎた為、生徒が手段を選び結果としてよさに気付ける工夫が必要であった。

また、ノート代わりに用いてもらったワークシートでは、ほとんどの生徒が板書を写す形での使用にとどまってしまった。授業の中においては、宮崎ら(2019)にあった通り、その都度方法知を生成し、その変容から洗練・精緻化すること

が肝要である。しかし、方法知を設問ごとに生成している生徒はいなかった。このことから、ワークシートの扱い方についての指導が不足していたことが考えられた。

また、提示した問題の難易度が適切でなかったことも影響したと考えられる。図7は板書の一部であるが、このような表を用いて問題解決を行う時間が必要であった。

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26				

図7 授業中の板書の様子

方程式のみでの問題解決は生徒たちにとって難易度が高かったと考えられる。よって、授業を行う前の教師の診断的評価が適切でなかったと考察する。

4.2 考察のまとめ

まず、原理の評価について述べる。設計した課題設計原理の原理2は、生徒の求めたい数量を文字で置くという方法知を生成するために作用したといえる。他人と意見交換をすることで、生徒が持っている方法知を顕在化した為であると考察した。そのため、設計した原理は「方程式の利用」の分野において効果を発揮したといえる。ただ課題点として、原理1と原理2の関連性が不明瞭であったことが挙げられる。原理1を踏まえて、原理2で方法知が確立されたのかが明らかでない。そのため、原理2のみでは方法知の生成に機能するか明らかではなく、原理の関連性や効力についてはさらなる検証が必要である。

次に教師の働きかけについて述べる。まず設計した課題を活かすためには事前の診断的評価、適切な生徒の実態把握が必要不可欠である。今回、原理は適切に作用していたが、問題の難易度は生徒に適していなかった。そのため、設計した課題を生徒の実態に応じた難易度に再設計する必要があった。よって、教師の働きかけの一つと

して、授業前における診断的評価が必要不可欠であることがいえる。

また、設計した課題を活かすための発問や指導も必要であると分かった。授業の導入場面の展開や授業中における発問、教具の使い方など教師の働きかけとしての指導や発問があることで、設計した課題が促す活動を最大限引き出すことが出来ることが分かった。しかし、どのような発問や指導が望ましいかはさらに追求すべき点であるといえる。

5 研究の結論と課題

5.1 結論

本研究の結論について述べる。成果として、方程式の利用の分野における方法知を生成する課題設計原理が設計できたことがあげられる。それに伴って、本研究で行った教材開発方法も有用であった。また、原理の評価の方法についても SCAT を用いた分析の一例を示すことが出来た。生徒の活動という具体的な場面からだけでなく、理論的な視点からも原理を評価することが出来た。また、推測段階であった教師の働きかけが必須であることも明確にすることが出来た。

5.2 研究の課題

本研究における課題は原理同士の関連性についての評価が不十分であることである。また、教師の働きかけについてもどのようなものが適しているのか明らかではないため、設計した課題の促す活動を最大限引き出す発問や指導について、更に研究する必要がある。

謝辞

本研究の実施にあたり、内藤雄一郎教諭をはじめとする先生方、並びに児童のみなさまには多くのご協力をいただきました。心より感謝申し上げます。

6 参考・引用文献

- ・ 国立教育政策研究所(2018).『全国学力・学習状況調査報告書』(2025.02.02 最終確認)
- ・ 国立教育政策研究所(2024).『全国学力・学習状況調査報告書』(2025.02.02 最終確認)
- ・ 小松孝太郎(2023).『学校数学における課題設計原理の開発に関する研究の枠組み』. 日本数学教育学会誌 第105巻 第1号
- ・ 宮崎樹夫ら(2017).『領域固有な方法知を生成しようとする態度を養うタスクデザイン - オープンな場面で証明することを例として - 』. 日本科学教育学会
- ・ 三輪辰郎(1996).『文字式の指導序説』. 筑波数学教育研究
- ・ 文部科学省(2017).『中学校学習指導要領解説(平成29年度告示) 数学編』. 日本文教出版株式会社
- ・ 大谷尚(2019).『質的研究の考え方 研究方法論から SCAT による分析まで』. 名古屋大学出版会