

効果的な補助線の指導

—直観的な考察を通して—

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 小松健一

1 研究動機

私は学生の頃から、図形領域にあまりいい印象をもっていなかった。覚えた語句を使用したり、公式を利用して問題を解いたりする知識や技能に比べ、その問題を解くために必要な線を考えることが、この図形領域には多かったためである。特に高等学校時代の数学の先生に、なぜ補助線をそこに引くのか質問すると「ここに引きたくなるから」と言われ、なぜそこに引くのか、なぜその線を発見できたのかといったことを明確には教えてはくれなかった。教職に就き補助線を扱う問題を幾度となく経験しているが、なぜそこに引くのか、なぜそんな線が考えられたのかうまく説明できない現状のまま、数学科の教員として時が過ぎてしまった。今まで受け持った生徒も私と同じ思いを持って過ごしてしまっていることを考えると今すぐにでも解決したいと思ったため本研究テーマで進めていきたいと思った。

平成29年度告示中学校学習指導要領解説数学編では「図形について主に直観的な取扱いをしており、それを通して、図形を直観的に捉える力はかなり高まってきていると述べてある。このことからわかるように小学校で図形を直観的に捉えることは行っていると言える。しかし、平成29年度告示小学校学習指導要領解説算数編では直観的な力が高まったなどという記述は図形領域の中で示されていない。そこで仮説として考えられるのが、「直観的な考えは徐々に身につくものであって特定の単元はない」ということである。その仮説をもとに、私のような思いをする生徒を可能な限り減らすために算数数学における補助線の指導をどのように行えば効果的なのかということの研究していく。

2 研究目的

清宮(1967)は12個の型を組み合わせで行われる初等幾何学における発見的研究法を提案した。

- (1) 既知事項を組合せる
- (2) 図から性質を知る
- (3) 定理の別証明から新性質を発見する
- (4) 条件を変形して新定理を得る
- (5) 特殊化する
- (6) ある性質を想定し、その必要十分条件を調べる
- (7) 逆の研究
- (8) 仮定を類似の条件で、おきかえての研究
- (9) 定理の証明を調べて、本質的でない部分の条件を、他の緩い条件でおきかえて拡張を得る
- (10) 定理の結論について、その必要十分条件を調べる
- (11) 定理の仮定の条件を、他のゆるい条件におきかえて、定理が成り立つかどうかを調べる
- (12) 相補的な条件の場合についての研究

また、平成29年告示中学校学習指導要領解説数学編にて改定の経緯及び基本方針の中に「AIの進化」について述べられていた。また「平成20年改訂の学習指導要領の教育内容を維持した上で」との記載から思考・判断・表現に限定して遡ってみると「表現に関する能力の育成」について述べられていた。

よって本研究の目的を先行文献に現代の教育を合わせることで「生徒自らが引きたくなるような補助線に関する効果的な指導を発見し、数学科に関わる教員にとって、効果的な補助線の指導とはどういったものかということ明らかにする」こととする。

3 研究方法

本研究の目的を達成するために次の方法で研究を進めた。まず、補助線について先行研究や文献にあたり、言葉のもつ定義や意味を確認する。次に、先行研究から得た知見を基にして、言語活動やICTを取り入れた授業を計画したり、どのようにして補助線を書くに至ったのかという視点から教材研究を行ったりする。そして、補助線を用いた図形が多く出題される中学校2年次の「平行線と角」という単元に焦点を当てて授業を実践する。そして実践授業での指導が生徒にどのような効果を与えたのかを成果物などから見取り、実践授業の分析や考察を行う。最後に、授業実践より得られた成果と課題を明らかにし、補助線を見つけるための指導で効果の得られた指導をまとめ、本研究の結論とする。

4 研究内容

4.1 補助線について

まず、補助線における定義について広辞苑を基に再確認した。広辞苑では補助線を「幾何の問題で、解答を導き出すために図形に補う直線または円」と定義しており、本研究でもこの定義を基にして進めていく。

4.2 「直感」と「直観」について

直感と直観の言葉の意味を調べ、その違いを再確認する。広辞苑では、直感と直観の言葉の意味を次のように記載している。

【直感】説明や証明を経ないで、物事の真相を心でただちに感じ知ること。すぐさまの感じ。

【直観】判断・推理などの思惟作用の結果ではなく、精神が対象を直接に知的に把握する作用

また、松原（1990）は直観について次の①～⑥のように述べている。

- ① 1に1を加えて2になると信じさせる力
- ② 論理の進行すべき道を照らして案内するもの
- ③ 悟り
- ④ 「具体」の中に「普遍」を観ること

⑤ 「個別」の「一般化」

⑥ 具体物を知覚することから始まる

また、同著書では「直観なしで論理の筋が進むはずがない」や「直観なしで人間は物を識（し）ることはできない」とも述べられている。このことから、この研究では直観的な考察を身に付けていくことを基にして研究を進めていくこととする。

4.3 教材について

始めに、算数数学において補助線に関する内容がどの学年でどんな内容が出ているのかということ調べた。その中で、「学年が上がるにつれて補助線を扱う機会が増え、難易度が高くなるのでははないか」と仮説を立てながらT社の教科書を参考に表1にまとめた。

表1 算数数学における補助線の扱い

| 学年 | 平面図形領域における補助線に関係する主な内容 |
|-------------|--|
| 小学校 4年次 | L字型図形の求積 |
| 小学校 5年次 | 多角形の内角の和 |
| 小学校 6年次 | 円の求積 縮図 拡大図 |
| 中学校 1年次 | 作図 |
| 中学校 2年次 | 多角形の内角の和 外角の和 三角形の内角の和 平行線と折れ線の角 矢じりの角 星形多角形の内角の和 |
| 中学校 3年次 | 校舎の高さ 三角形と比の証明 三角形と比の逆の証明 中点連結定理 平行線と比 円周角の定理を利用した計算 三平方の定理を利用した計算 |
| 高等学校 1年次 | 二等分線と比 三角形の五心 チェバ・メネラウスの定理 方べきの定理 正弦定理 余弦定理 接弦定理 |
| 高等学校 2年次 | 三角関数の合成 |
| 高等学校 3年次 | ベクトル |

(1) 校種ごとの違いについて

学年が上がる度に補助線を扱う問題が増え、

高等学校は特定の問題で扱うことをあまり行わず、単元を通して補助線を扱っていた。そして、補助線に関する内容も難易度も当初の仮説通りであることが分かった。

小学校と中学校の違いについては補助線を取り扱う数が大きく異なることが表1をみるとわかる。中学校と高等学校では、数ではなくその質に大きな違いが見られた。

(2) 校種ごとの特徴について

表1に記載はないが、小学校で扱う内容の中には、平行や垂線といったように補助線を引くための基礎となる知識がある。そのため小学校では補助線の知識を得ることに重点を置いていることが伺える。中学校の補助線に関する問題は、補助線を引けばたいていの答えが導き出せるような問題が多いのに対し、高等学校では補助線を引いてから問題が始まるような傾向が多いことが分かった。

(3) 問題の選定

表1にもあった通り、中学校2年次で補助線を利用する学習が増えていることから、今回は中学校2年次で研究を進めた。

「多角形の内角の和」については小学校5年次で一度を学習していること。「多角形の外角の和」については、多角形の外角を作成するために延長線を引くことを前提として解くので、これらのものを研究授業の問題として扱うことはしなかった。また、「矢じりの角」も補助線を利用して考えることができるが、「星形五角形の内角の和」を求める際の既習事項として位置づけていくため、本授業では取り扱わなかった。よって本研究では「4章 平行線と角」における「三角形の内角の和」以降の内容について授業実践を行った。尚、扱った問題については表1の太字で表した。

4.4 研究授業の分析

4.4.1 授業計画

令和4年10月27日から11月22日の期間で山梨県内の公立中学校2年生を対象に全3時間の授業実践を行った。授業の計画は以下の通りである。

第1時: 三角形の内角の和が 180° になること

を証明する。

第2時: 平行線と折れ線の角の求め方を考える。

第3時: 星形多角形の内角の和が 180° になることを証明する。

4.4.2 OPP シートについて

授業実践の前に OPP シートを配布し、生徒に説明を行った。これは山梨大学教職大学院で普段から使用されているものを活用したものである。

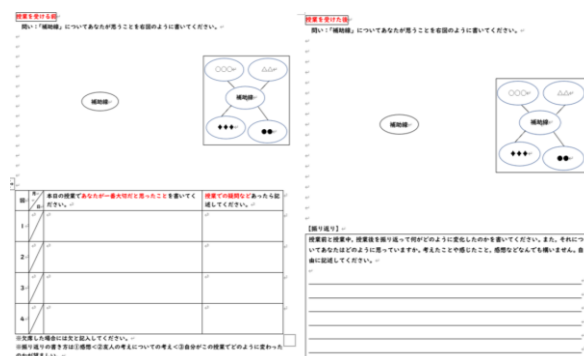


図1 OPPシート

OPP シートには以下の4つの項目を設けた。

- ①「補助線」についてあなたが思うことを書いてください
- ②授業の振り返り
- ③「補助線」についてあなたが思うことを書いてください
- ④全体を通しての振り返り

①については第1時の前半に記載する時間を設けた。②については授業ごとに気づいたことなど自分が考えたことを書く枠を設定し、授業が終わる度に OPP シートの回収を行った。③と④については、全授業を終えた後に記入する時間を設け、第3時終了後に OPP シートの回収を行った。

4.4.3 授業実践

ここからは授業実践の実際について述べていく。

(1) 第1時 10月27日 (木)

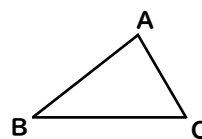


図2 三角形の内角の和

①指導意図（焦点化）

平行線の同位角や平行線の錯角を前時までに学習していることから、平行線を利用して説明できるようにしたい。また、既に学習した内容のある内容を取り上げることによって補助線に焦点を当てて授業を展開したい。

②本時の目標

三角形の内角の和が 180° になる方法を説明できる

③指導の実際

- ・小学校時の証明方法を確認

任意の三角形がかかれた紙の内角を保ちながら切り、それらの角を一か所に集めて平角になることから 180° を共通認識させた。

- ・自力解決

紙での証明は別の三角形で同じことは厳密な証明とは言えないことから、どうしたら三角形の内角の和が 180° であることを証明できそうか確認して自力解決を行った。

- ・発表

発表を通して三角形の内角の和が 180° であることを確認する。その際に平行線を補助線として活用することで証明できることを確認した。

④本時のワークシート

自由に補助線やその補助線を考え付いた理由を書き込めたり、友人の考えを書き込めたりできるようなワークシートを作成した。

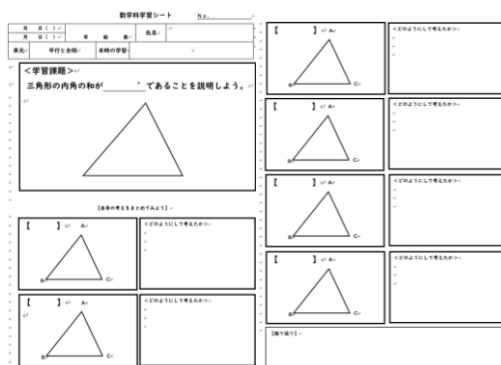


図3 第1時ワークシート

(2) 第2時 11月10日(木)

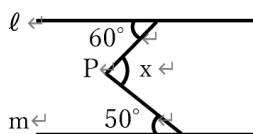


図4 平行線と折れ線の角

①指導意図（顕在化）

平行線と折れ線の角の大きさを求める過程には、様々な種類の補助線が利用される。その補助線を考えた理由を問うことで補助線をどのように捉えているかを探りたい。

②本時の目標

平行線と折れ線の角の求め方を考えよう

③指導の実際

- ・本時の問題と関連を図る導入と予想

スライドを用意して平行線と直線との交点Pが動くことでできる角は何度になるのか予想した。その際、解くために必要な角の大きさを提示した。

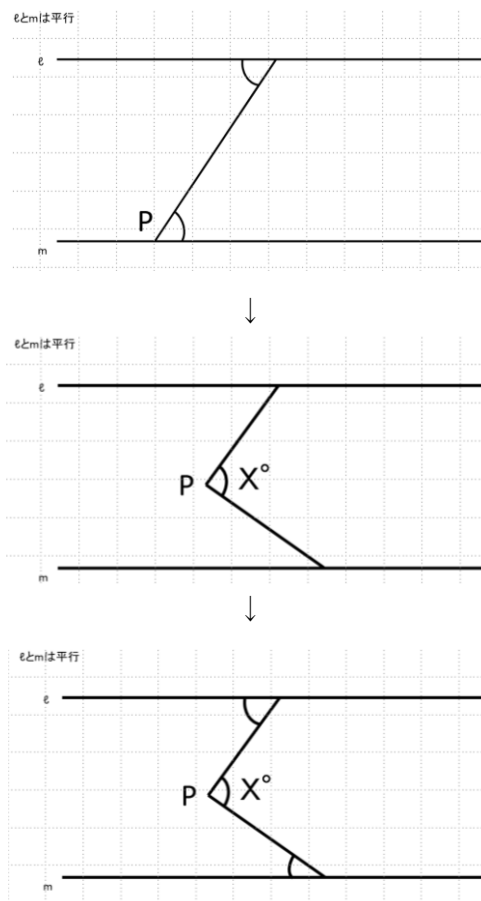


図5 第2時導入時のスライド

- ・平行線と折れ線の角の大きさを確認

平行線と折れ線の角の大きさについてGeoGebraを利用し、解く前に予想が正しかったのか正答を確認した。

- ・自力解決

求め方の種類を1つに限定せずに別のやり

方はないか考える時間をつくった。その際に、なぜそのような補助線を引くことができたのか理由も同時に記入した。

・発表

生徒が意見を発表して、平行線と折れ線の角の大きさが 110° になることを証明した用紙を黒板に貼り、説明をした。その際、補助線の引き方は多岐にわたり、既習事項を活用することで証明できることを確認した。

・ワークシートの「はかせ」へ記入

「はかせ」の解き方とその理由をワークシートに記入した。ここでいう「はかせ」とは「速く、簡単に、正確に」の頭文字をとったものである。この「はかせ」で選んだやり方が、生徒にとって最も効果的なやり方と同等のものとして研究を進めた。

⑥ワークシート

自由に補助線やその補助線を考え付いた理由を書き込めたり、友人の考えを書き込めたりできるようなワークシートを作成した。

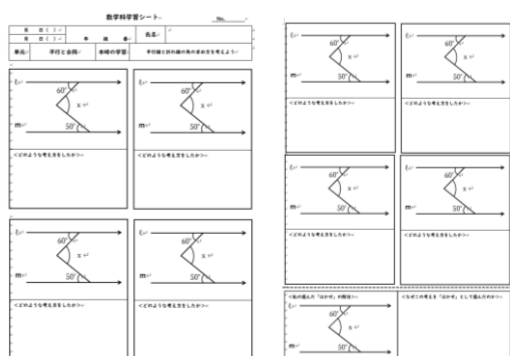


図6 第2時ワークシート

(3) 第3時 11月22日(木)

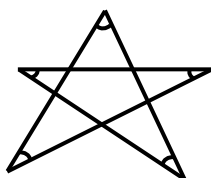


図7 星形五角形の内角の和

①指導意図(深化)

平行線と折れ線の角を求める際には、すでに平行線が記載されている。そのことから平行線を利用して解けないか考える生徒は多いと予想した。一方、星形五角形には平行線

となる2直線が存在しない。つまり既習の知識の何を利用すればいいのかという意図を見取りたい。また、本時ではどのようなことをするのかという不安を払拭するため、前時の授業展開の大部分をそのまま踏襲した。

②本時の目標

星形五角形の内角の和がどのようにして 180° になるか考えよう

③指導の実際

・本時の問題と関連を図る導入と予想

平行線と折れ線の角の図から変化して星形五角形になるスライドを提示した。そして星形五角形の内角の和に焦点を当てて、その角にはどんな特徴があるか予想した。

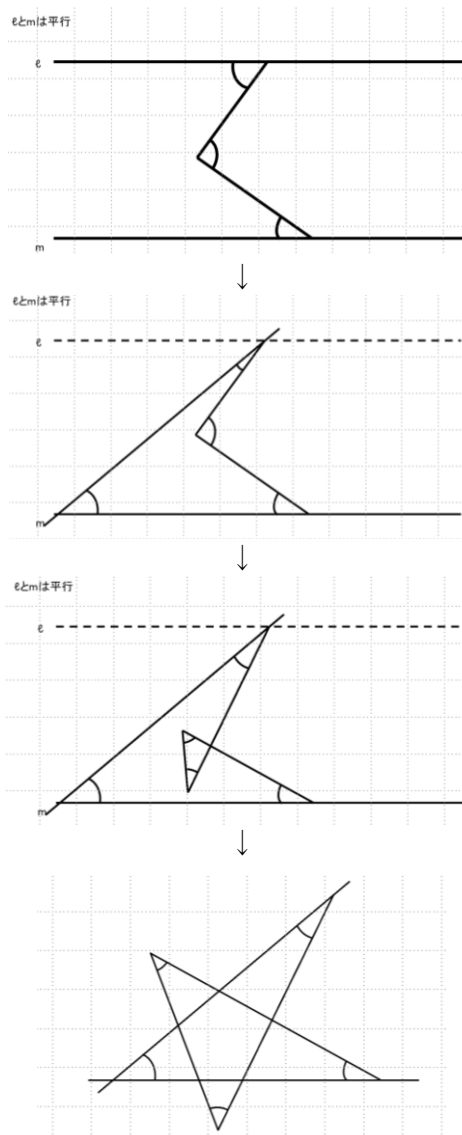


図8 第3時導入時のスライド

・星形五角形の内角の和が 180° なる確認
 星形五角形の内角の和が 180° になることについて GeoGebra を利用し、解く前に予想が正しかったのか正答を確認した。

・自力解決

求め方の種類を1つに限定せずに、別のやり方はないか考える時間をつくった。その際に、なぜそのような補助線を引くことができたのか理由も同時に記入した。

・生徒の様子から問題の結論を変える

生徒の一人が矢じりの角の部分の指して「ここが分かればできると思う」という疑問を全体の疑問として投げかけ、矢じりの角を用いて星形五角形の内角の和を求めた。

・発表

生徒が意見を発表して星形五角形の内角の和が 180° になることを証明した用紙を黒板に貼り、説明をした。その際、補助線の引き方は多岐にわたり、既習事項を活用することで証明できることを確認した。

・ワークシートへ記入

第2時で「はかせ」のやり方を選択しワークシートに記入するよう指示したが、本時は「はかせ」ではなく、「自分にとって最も効果的な方法」を聞いた。第2時との変更理由は「はかせ」に捉われず自由にその方法の選択理由を聞いたかったことにある。

⑥ワークシート

自由に補助線やその補助線を考え付いた理由を書き込めたり、友人の考えを書き込めたりできるようなワークシートを作成した。

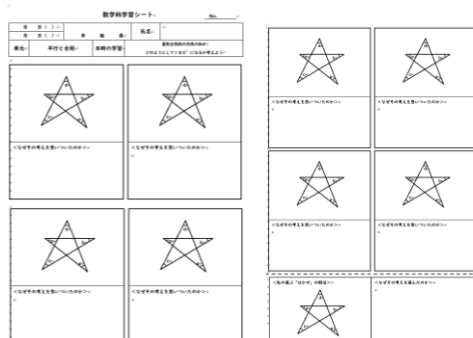


図9 第3時ワークシート

すべての授業後には、ワークシートと OPP シートに記入する時間を設け、回収した。

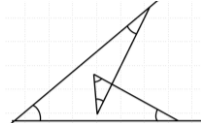
5 実践授業を終えての成果と課題

5.1 成果

補助線を生徒が引けるようになるために行った効果的な指導とその成果を以下に示す。

1つ目は、補助線に関する授業を展開する上で「取り上げる問題の順序」を留意しておくことである。表1にもある通り、学年が上がる度に補助線に関する問題が増えてくる一方、小学校や中学校段階で補助線を引くための基礎となる既習事項を、どれだけ感得しているかが重要であることが分かる。そこで、既習事項を感得した上で、問題設定をどのような観点で設定するか表にして示す。

表2 問題設定の観点と例

| 観点 | 本研究での問題やその他例 (中学校で学習する内容) |
|--------------------|---|
| ①既習事項の感得 | <ul style="list-style-type: none"> ・対頂角 ・平行線の同位角 ・多角形の外角の和など |
| ②既習事項を改めて証明する問題 | <ul style="list-style-type: none"> ・三角形の内角の和 ・角の二等分線の証明 |
| ③多くの補助線が引ける問題 | <ul style="list-style-type: none"> ・平行線と折れ線の角 ・矢じりの角 |
| ④単元を通して得た知識を活用した問題 | <ul style="list-style-type: none"> ・星形五角形の内角の和 ・星形七角形の内角の和 ・凹型四角形の内角と内部にある三角形の内角の和  |

授業実践を通して、國宗、熊倉、裕元(2013)での「既習事項と結び付けて考えることによって補助線のイメージがわいてくる」にもあるように既習事項をどれだけ得ているかという大切さを改めて実感した。その上で、②～④のように問題を分けた。第1時を終えた生徒の感想に「当たり前のことは意外と当たり前ではなかった」と記載してあった。このことから、補助線指導における問題の設定は、既習事項を改めて取り扱うことが補助線指導

の起点となることが分かった。

次に、多くの補助線が引ける問題を設定した。本授業では、平行線と折れ線の角を問題として取り上げた。ここでは「直観的な考え方を身に付けること」と「安心して補助線を引けるようにする」ことの2点に焦点を当てて授業を展開した。授業後の生徒の振り返りでは「こんなに多くのやり方があるとは思わなかった。他の問題にもこの考え方を試したい」という記述から、多くのやり方を共有することで次の補助線に対する意欲の向上と直観的な考え方に結び付けることができた。

最後に、この単元を通して得た知識を活用した問題を設定した。この指導で、毎回の授業で得られた学習が次の授業では既習事項となるように指導をすることで生徒の図形に対する意欲や考え方に良い影響をもたらした。

つまり、問題の設定を教師側が段階的・意図的に設定することで補助線に対する生徒の敷居が下がったといえる。

2つ目は「授業内で正答を予想させたことで生徒にとって集中してその問題に向き合うことができた」ことである。第2時では、問われている角の大きさを予想させると2人の生徒が発言した。

T31: この角は何度になると思いますか？

T32: 予想で構わないよ。予想は単に自分が思ったことだから間違っても全然 OK。何度だと思おう？

S3: 間違ってるかもだけど 100° かな？

T33: 他にいる？

S4: 110°

T34: 他には？

T35: 100° だと思う人？ (1名挙手)

T36: 110° だと思う人？ (大勢が挙手)

T37: そんなに 110° だと思っているならぜひ予想の時に言おうね。

これがきっかけで「予想は間違っても良いもの」ということを前面に出すことができ、生徒の安心に繋がった。そして、生徒が予想した解答を、GeoGebra を用いて正しいかどうか確認したこともまた生徒が安心して問題に取り組める指導の一つであった。その結果、こ

の授業では多くの考えが生み出された。つまり安心できる環境づくりをしたことによって、集中してその問題に向き合うことができた。

3つ目は「生徒の疑問を全員に共有し、直前に学習した知識を用いて、解決までの道のりを示すこと」である。生徒が「(矢じりの角の部分指着) この角が分かればできそう」という発言をした。そこでその疑問を全体で共有すると、矢じりの角で求められるという意見が出た。その意見から、矢じりの角で求められるということを知った生徒はそのやり方を利用して解答を出していた。授業の最後に「自分の中で最も効果的だったと思うやり方」を問うと、19名中その生徒を含む約半数の10名の生徒が矢じりの角を利用して、星形五角形の内角の和を解いていた。

4つ目は、「たった一人だけが答えた解答を取り上げること」で効果が表れた。第2時では、図10のように答えた生徒は一人だった。

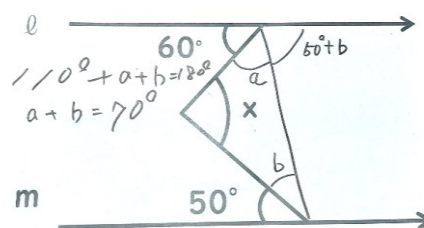


図10 MT 生の考え方①

MT 生は、平行線と折れ線の交点を繋ぎ、平角と三角形の内角の和を利用して解を導いた。このやり方をしている生徒は一人もいなかったため、全体の前で取り上げることで特別感を味わわせるように配慮し、授業の最後に取り上げた。その生徒は授業後の振り返りで『他の問題のときに今回の「はかせ」がつかえるのかためしたい』との記述があった。

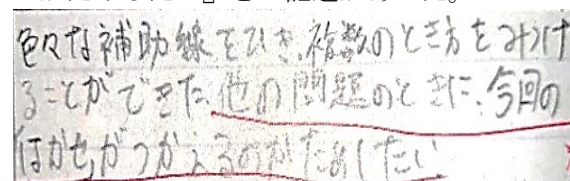


図11 第2時後のMT 生の振り返り

MT 生は、次の図12で示したようにやじりの角を求める際にも図10と同様のやり方を基にして問題に取り組んでいた。

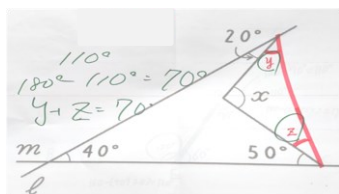


図 12 MT 生の考え方②

別日に MT 生が星形五角形を求める際に同じやり方を利用して問題を解こうとしていた。

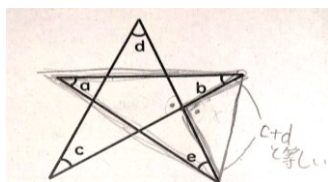


図 13 MT 生の考え方③

今までは問題にかいてある図形にむりやりこまごまと同じで、とか書きこむだけだった。しかし授業を通じて対頂角や錯角、平行線、星形五角形の内部の和が110°になっている部分などの性質を理角できた。また補助線をかくと新しい図形がみられて発想がひろがったので、これから積極的にとりいれていこうと思った。

図 14 最後の MT 生の振り返り

MT 生はすべての授業を終えた後の振り返りで「今までは問題にかいてある図形にむりやりこまごまと同じでとか書きこむだけだった。(中略) 補助線をひくと新しい図形がみえたりして発想がひろがったのでこれから積極的にとりいれていこうと思った。」と記載していた。このことから自分自身が考えた特殊なやり方で一度成功体験をしていると、別の問題でも活用できるのではないかと考えを発展させ実際に使用し、今後も活用したいという意思が芽生えたことが伺える。よって「たった一人だけが答えた解答を取り上げることで効果が表れたと結論付けられる。

5.2 課題

今回はコロナウイルスの影響もあり、授業を受けた生徒数が全体の3分の2程の人数だったので得られたデータ数が少なかった。このことからグループでの学習が不十分で、生徒同士で対話をする言語活動が展開できなかったため表現する活動による効果を追究できなかった。次年度の課題として生徒同士の言語活動を更に取り入れた授業展開がどのような効果をもたらすのかを踏まえて調べたい。

6 本研究の結論

本研究の目的は「生徒自らが引きたくくなるような補助線に関する効果的な指導を発見し、数学科に関わる教員にとって、効果的な補助線の指導とはどういったものかということをも明らかにする」ことであった。

以下の4点が今回の実践授業を通して分かった補助線の指導である。

- (1) 補助線への敷居を下げる問題の設定
- (2) 予想と解の確認を最初に行うことによる安心できる環境づくり
- (3) 生徒の疑問への対応を通じた授業展開
- (4) 最も多かった解答と最も少なかった解答の取り上げ

これらをもとに授業を展開することで、補助線を生徒自らが引きたくになると結論付けた。

引用・参考文献

- ・藤井斉亮, 真島秀行他(2020)『新しい算数 1 ①②～6』, 東京書籍
- ・藤井斉亮, 真島秀行他(2021)『新しい数学 1 ～3』, 東京書籍
- ・國宗進, 熊倉啓之, 裕元新一郎 (2013)「図形の論証の理解とその学習指導—図形の相似に関する補助線を引く方法の意識化」, 日本数学教育学会誌数学教育第 95 巻, RS 号, pp.113-120
- ・侯野博, 河野俊丈他 (2021)『新編数学』 I ～III, A～C, 東京書籍
- ・松原元一 (1990)『数学的見方考え方—子どもはどのように考えるか』, 国土社, pp.19-35
- ・文部科学省 (2008)『中学校学習指導要領解説—数学編—』, 教育出版, p.8
- ・文部科学省 (2017)『小学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説—算数編—』, 日本文教出版
- ・文部科学省 (2018)『中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説—数学編—』, 日本文教出版, p.1, p.46
- ・清宮俊雄 (1967)「初等幾何学における発見的研究法について」, 日本数学教育学会誌数学教育第 13 巻, R 号, pp.16-45