数学的結果を現実事象に即して解釈する力の育成に関する研究

－解の吟味・解釈の場面に焦点をあてて－

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野　宮下迪

1.　本研究の目的

実生活における問題を解決する際に，数量や図形に着目して定式化することだけでなく，数学的な結果を現実の事象に即して解釈することが必要である。平成 28 年度に行われた全国学力・学習状況調査では，数学的な結果を現実の事象に即して解釈することができていないことが課題として挙げられている。

竺沙(2000)は日本の中学生について，「文章題を解く際に現実世界の知識や現実的制約を考慮せずに解をそのまま答とする場合がある。」とし,「文章題の解決において, 現実場面を考慮したとき解を修正する指導が必要である。」と述べている。ここでいう「解」は数学モデルを数学的に処理した数学的結果を表し,「答」は解を解釈・吟味して現実の世界に適応させたものを表している。

このことから，数学的な結果を吟味・解釈して現実の事象に適応させる指導が必要であることがわかる。ここで述べられている文章題には方程式を利用した問題も含まれている。

三輪(1991)は「方程式・不等式を利用して問題を解決するときに，方程式・不等式を作る，方程式・不等式を解くことのほかに，解いて得られた方程式・不等式の解が，もとの問題に合っている答えになっているかどうかの検討が必要である。」と述べている。

方程式を解き得られた解が問題の答えとして適当であるかどうかを調べる活動は，方程式を利用した問題解決において必要な活動である。方程式の解と問題の答えは，竺沙の述べる「解」と「答」にそれぞれ対応している。そのため, 方程式の解がもとの問題に合っている答えになっているかどうかの検討を重視した指導は，現実場面を考慮したときに解を修正する指導に繋がるのではないかと考える。

これらのことより，方程式を利用した問題解決の学習を通して，数学的な結果を現実の事象に即して解釈する力の育成に寄与できるのではないかと考える。

よって本研究の目的は，方程式を利用した問題解決の授業実践を通して，数学的結果を現実事象に即して解釈する力を育成できるのか検証することとする。

2.　研究の方法

① 先行研究の分析と考察を行い，数学的結果を現実事象に即して解釈する過程を位置づけ，本研究における方程式利用の図式を作成する。

② 先行研究における方程式を利用した問題解決の授業，全国学力・学習状況調査，学習指導要領，教科用図書を分析し授業実践の示唆を得る。

③ 筆者による授業実践の分析と考察を行い，方程式を利用した問題解決において，数学的結果を現実事象に即して解釈する力に寄与できたのか概括する。

3.　方程式利用の過程の考察

本研究にあたり，方程式利用の過程と研究の指針を明確にする。そのため，数学を利用して問題を解決する過程を位置づけるために数学的モデル化過程を考察する。そのうえで，先行研究をもとに文字式利用について考察したのち，方程式利用の過程を具体的に考察する。

3.1　数学的モデル化過程の分析と考察

数学を利用して問題を解決する過程を位置づけるために，数学的モデル化過程について考察する。ここでは，三輪(1983)の数学的モデル

化過程を示す。

「それまでの経験や観察を基にして，何かある事象が探究を要するという認識があるという前提で，

① その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）
② 定式化した問題を解く（数学的作業）
③ 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈・評価）
④ 問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）

の段階を含む過程のことである。」

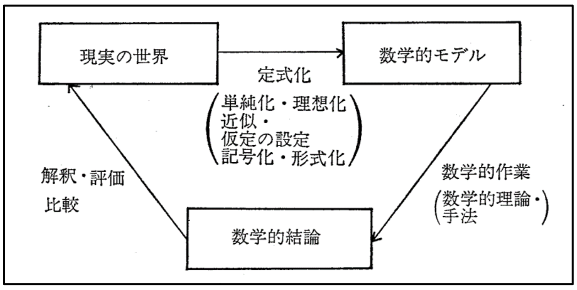


図３－１：数学的モデル化過程（三輪，1983）

三輪（1983）は，「数学的モデル化の過程には，数学的考え方と呼ばれるものの代表的ともいえる幾つかの思考法・着想が含まれる」と述べている。これらのことを踏まえて三輪は，「数学的モデル化の過程を通して，この面の育成をはかることが十分に考えられるわけである。」と述べている。

数学的モデル化過程は，数学を使って問題を解決するときに経ていく過程のことである。この過程の中には，数学的な考え方の基本的な思考法や着想が含まれている。そのため，数学を使った問題解決では，数学的モデル化過程の踏まえた適切な指導を行うことが必要であると考える。これは方程式を利用した問題解決においても同様である。

また，数学的考え方の代表的な思考法・着想に解釈・評価が示されていることから，数学的結果を現実事象に即して解釈することは数学を利用した問題解決には重要であることは明らかである。このことは本研究において重要な位置を占める。

3.2　文字式利用の図式の分析と考察

方程式は文字式の基礎の上に成る。そのため，文字式利用について考察する。三輪（1996）は，文字式を数学における主要な思考方法として位置付けている。数学的モデル化過程（図３－１）を90°回転し，文字式利用に表現し直した文字式利用の図式を提案している。

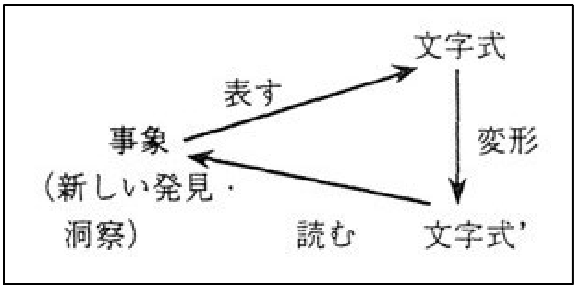


図３－２：文字式利用の図式（三輪，1996）

この図式は，事象，文字式，文字式’の３つの状態と表す，変形，読むの３つの過程から成る図式である。

3.3　方程式利用の図式の分析と考察

前節で示した文字式利用の図式（図３－２）に関して，三輪（1996）は，方程式を利用した問題解決の図式をやや一般化したものと述べている。そのため，方程式利用の図式は，文字式利用の図式を特殊化しているものであるということができる。

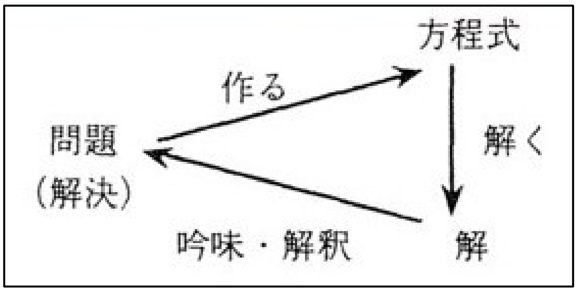


図３－３：方程式利用の図式（三輪，1996）

方程式利用の図式（図３－３）における吟味・解釈とは，方程式を解いて得られた解が問題の答えとして適当であるかどうかを確かめることである。吟味・解釈の必要性は，作られた方程式には，問題の条件を過不足なく表しているとは限らないため，必ずしも解が問題の答えと

して適切であるとは言えないことにある。これらのことから，方程式を利用した問題解決において，解の吟味・解釈は必要な過程であることがわかる。

3.4　本研究における方程式利用の図式の考察

三輪(1983)は，数学的モデル化過程の段階に関して，「数学的モデル化の段階は，そこに示した順序の通りに機械的直線的に進むものではない。ときには逆行あるいは何回もの往復があり，ときには，飛躍があることであろう。」と述べている。数学的モデル化過程は，数学を使って問題を解決するときに経ていく過程のことであることから，方程式を利用した問題解決においても同様であると考える。

方程式利用の図式をもとにすると，問題と方程式の間に作用する過程には，問題から方程式を「つくる」過程だけでなく，方程式が問題に含まれているいずれの数量関係を表しているのか方程式を「読む」過程が存在する。同様に，方程式と解の間には，方程式から解を求める「解く」過程と解が方程式を満たす値であるか「確かめる」過程が存在する。このように問題と方程式，方程式と解を往還する過程が存在していると考える。これらのことから解と問題の間にも，解が問題の条件を十全に満たしているかどうかを「吟味・解釈」する過程と問題の題意から解を考察する過程も存在していると考える。

これらのことから，問題，方程式，解の３つの状態を何度も往還することで問題解決へとつながると考える。これまで得た示唆をもとに，本研究において次に示す方程式利用の図式を提案し，この図式を軸として研究を進める。

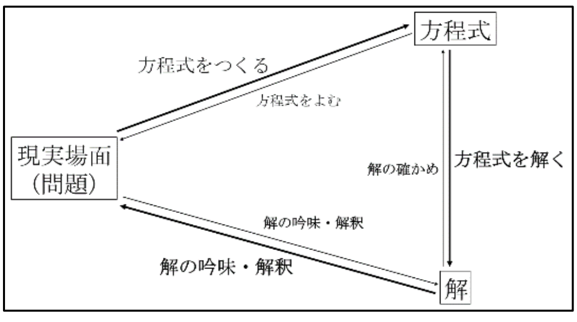


図３－４：方程式利用の図式

4.　授業実践の分析と考察

先行研究や学習指導要領，教科用図書の分析を行い，得られた示唆をもとに授業実践の観点を定めた。

a.　解が現実の場面に適しているか確かめる活動を設定する。

b.　解が現実の場面に適さない問を行う。

c.　方程式を利用して問題を解決する過程のモデル図を提示する。

d.　解が現実の場面に適しているか確かめる経験を複数回行う。

この観点をもとに行った授業実践について分析を行い，成果と課題を明らかにして多少の考察を述べる。

4.1　授業実践の概要

本研究における授業実践は，前述の観点に基づいた指導を中学校第１学年の方程式の利用で全６時間行った。

時期：令和４年 10 月

対象：山梨県内公立中学校第１学年 29 名

また，授業実践の指導内容は次の通りである。

第１時：　現実の問題を方程式を利用して解決することができることに気付かせる。
　方程式を利用して問題解決をすることの良さを理解させる。

第２時：　個数と代金に関する問題を，方程式を利用して解決することができるようにする。
　方程式を利用して問題を解決する過程や手順を理解させる。

第３時：　過不足に関する問題を，方程式を利用して解決することができるようにする。
　文字の置き方によって，方程式が異なることに気付かせ，文字の置き方の重要性を理解させる。

第４時：　道のり・時間・速さに関する問題を，方程式を利用して解決することができるようにする。
　求めた解が現実場面や問題の条件に適しているか確かめることの重要性に気付くことができる。

第５時：　解が現実場面や問題の条件に適さない場合に，解を吟味し，現実場面や問題の条件を変更することで，解決することができることに気付かせる。

第６時：　解が現実場面や問題の条件に適さない場合に，解を解釈し，解が現実場面や問題の条件に適するように修正することで問題を解決することができることに気付かせる。

これより，授業実践の第６時において具体的に述べることとする。第１時においては観点ａ，第２時と第３時においては観点ａ，ｃ，第４時と第５時においては観点ａ，ｂ，ｃを満たした実践となっていることをここで述べておく。

4.2　授業実践の実際（第６時）

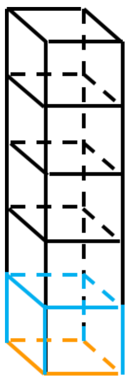
①　現実場面と問題１の提示

（現実場面）

Ａさんは，本棚を作成しようとしています。

（問題１）

図のような立方体を重ねて本棚を作成しようと考えています。立方体をｘ個重ねた本棚を作るとき，棒は（４＋８ｘ）本必要です。棒が 108 本あるとき，立方体をいくつ重ねた本棚を作ることができますか。



現実場面と問題１を提示し，問題把握を行った。そして問題１から明らかである情報と不明な情報を考えさせた。このとき，立方体を重ねた図も提示し，作成しようとしている本棚のイメージを持たせた。

②　自力解決

立方体の重ねた図をもとに，（４＋８ｘ）の４や８が何を表しているのか全体で確認した。その後，個人での問題解決を行った。

③　解決方法の確認と共有

生徒にどのように方程式を立てたのか尋ねた。そして，解と問題の答えを全体で確認した。

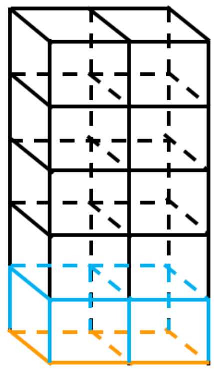
④　現実場面の確認

自力解決のときの生徒とのやり取りから，本１冊の大きさ（高さ 174 ㎜×幅 112 ㎜）をもとに，棒１本の長さを 200 ㎜と仮定して，問題の答えとなる 13 段が現実的に適切であるか考えさせた。

⑤　問題２の提示

（問題２）

図のような立方体を横に２つつなげて，それを重ねて本棚を作成しようと考えました。ｘ段の本棚を作るとき，棒は（７+13x）本必要です。棒が 108 本あるとき，どのような本棚を作ることができますか。



問題１の条件を変更した問題２を提示し，問題把握を行った。そして問題２から明らかである情報と不明な情報を考えさせた。このとき，立方体を重ねた図も提示し，作成しようとしている本棚のイメージを持たせた。

⑥　自力解決

立方体の重ねた図をもとに，（７+13x）の７や１３が何を表しているのか全体で確認した。その後，個人での問題解決を行った。

⑦　解決方法の確認と共有

生徒にどのように方程式を立てたのか尋ねた。解が整数値で得られないことに疑問を抱いていたが，方程式を解く過程では間違いはないことを確認した。

⑧　解の吟味・解釈

ここで，解をもとにどんな本棚ができるのかと尋ね，どのように解を解釈して問題を解決するのか考えさせ，全体で確認と共有を行った。

⑨　図式の提示

本授業のまとめとして，方程式を利用の図式（図３－４）を提示し，学習内容を振り返らせた。その中で，解が問題の答えとして適切であるか確かめることが必要であることを説明した。

4.3　授業実践の分析

授業実践のねらいに即して，ワークシートの分析し，学習者がどのような思考のもと，数学

的結果を解釈しているのか考察する。

第６時では，問題１の問題解決と問題２の問題解決の２つの問題解決を行った。最初に問題１の問題解決の分析を行う。問題１の解決方法を次のようにまとめる。

表４－１：問題１における解答方法

解決方法	人数（人）
方程式	29
算術的な考え方	0
無回答	0

問題１の解決には，学習者全員が方程式を利用している。これは，教師の言葉かけによるものであると考える。

T23	１つだけ説明するね。（４+８x）はどうやってわかったかって話なんだけど，立方体を１つ作るときに，底面に４本棒を置くよね。そしたら，縦に４本，横に４本，全部で８本置くよね。そうすると，立方体が１つできるよね。２つめ作るときどうするかって，８本を乗せれば２つ目ができるよね。今，立方体をx個重ねたときを考えているよね。立方体を１つの時は，８を１つ，２つのときは８を２つだから，x個の時は，８×xで８xになるよね。いい。そしたら，その問題を方程式を使って解いてみてください。

また，いずれの生徒においても解を正しく求めることができていた。具体的に生徒のワークシートを挙げる。

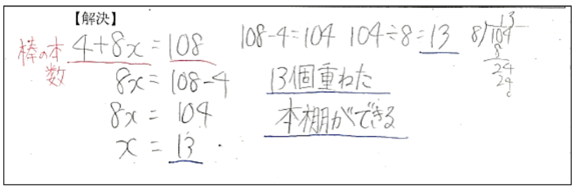


図４－１：生徒６の解答

問題２においても問題１同様に，方程式を利用して解決を行った。解$x=\frac{101}{13}$を正しく求めた解答を次のように分類した（表４－２）。複数の解答を行った生徒がいるため，合計人数は学習者数である 29 となっていない。

表４－２：問題２における解答類型

解答類型	人数（人）
７段	10
一方が７段， もう一方が８段	3
８段	1
その他	2
解釈なし	10

半数以上の生徒がなんらかの解釈を行い，解決を試みていることが明らかである。ここより，生徒のワークシートやプロトコルをもとに具体的に分析する。

（ｉ）解釈なし

生徒６のワークシート（図４－２）のわり切れないという記述から，解が整数値となるという予想の上で解決していることがわかる。そのため，解が整数値で得られないことに疑問を抱いている。学習感想において，「方程式に小数が出てくるなんておかしいと思っていた」という記述があり，整数解を得られなかった方程式がおかしいという認識があったことがわかる。

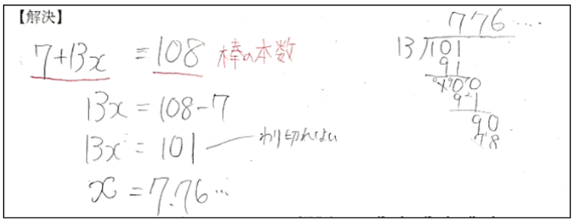


図４－２：生徒６の解答

（ⅱ）７段

生徒 21 は，x が本棚の段数を表していることから，解が正の整数値となると考えている。しかし，解が正の整数値とならないことに疑問を抱いている。そして問題へ戻り，「どのような」という問いから，問題を現実的に捉え，解を解釈している様相が確認できる。また学習感

想において「いつも解が問題の答えだと思っていたけど，見方が変わりました。」と記述していることから，本授業を通して数学観が変容したと捉えられる。

S75	どのようなってどのような
T63	この状況でどんな本棚ができる。
S76	この状況だと７段。
T64	（生徒 21）はこの状況だと７段作れるって考えたんだね。答えとしてこれはどうかな。
S77	確かに。

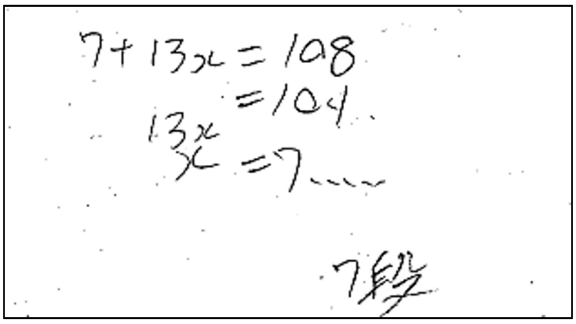


図４－３：生徒 21 の解答

（iii）一方が７段，もう一方が８段

生徒 12 は，解$x=\frac{101}{13}$を７余り 10 と解釈し，段数は整数値であることを考慮して答えを７段できるとしている。このように現実事象を考慮して解を解釈し，答えを導き出している様相が確認できた。

その後，問題１において立方体を１つ重ねるのに必要な棒の本数が８本であることと 7 段作ると 10 本の余りがあることから，片側だけに立方体を１つ重ねられることに気付き，７段と１個という答えを導いている。全体共有時にも取り上げ，「10 本余っているってことは前の問題（問題１）で８本で１つ作れるってことだから，もう１段作れる。」と発言している。このことから，１度導き出した答えを考察し，現実場面や問題の条件を考慮して，新たな答えを導いている様相も確認できた。

また学習感想において，「解がすべて現実場面に適しているかも問題を解く上で大切だということが分かった。」と記述していることから，数学的結果を現実事象に即して解釈することの必要性を感得できていることが確認できる。

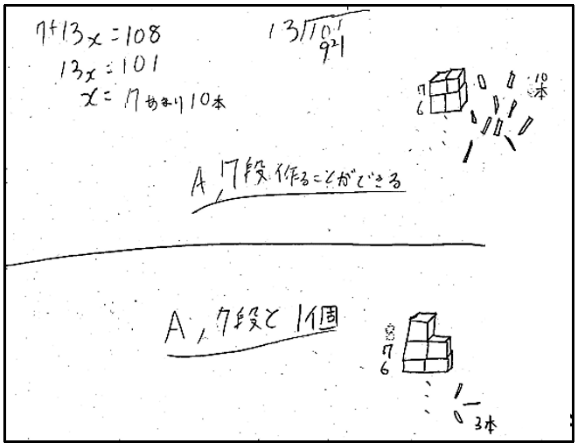


図４－４：生徒 12 の解答

（iv）８段

生徒 17 は，解を$x=7\frac{10}{13}$と表現している。現実事象において本棚を作る計画をしている段階であるということを加味したうえで解を解釈し，棒を３本追加することで８段作れるとしている。学習感想において，「解を解釈すれば様々な答えが出て面白いと思った。」とあり，解の吟味・解釈によって，問題の答えが複数になることについて記述している。そして問題の答えが複数であるが，いずれも答えとして適していることを理解している。

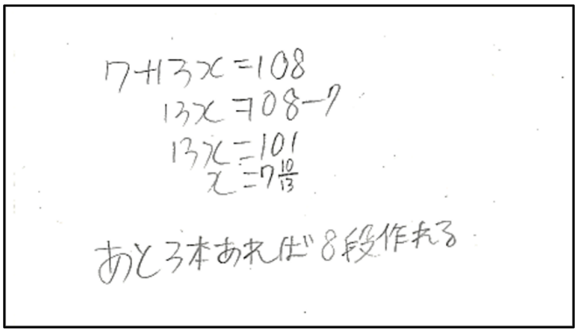


図４－５：生徒 17 の解答

4.4　授業実践の成果

分析から授業実践の成果を述べる。成果として，以下の３点を挙げる。

○　解が現実事象を考慮したときに答えとし

て適さない問題を扱うことで，数学的結果を現実事象に即して解釈する必要性を感得させせることができる。

○　数学的結果を考察する際に，現実事象についても考察することができる。

○　方程式利用の図式を提示することで，解決の過程が明確になる。

第１に，方程式の解が現実事象を考慮したときに答えとして適さない問題を扱うことで，数学的結果を現実事象に即して解釈する必要性を感得させせることができる点である。第６時では未知数 x が本棚の段数を表しているのに対して，正の整数解とならないことから，現実事象を考慮して，解を解釈することで解決しようとする様相が見られた。実際に，問題２の解決では，７段や一方が７段，もう一方が８段，８段のように解を解釈して解決している（図４－３，４－４，４－５）。

第２に，数学的結果を考察する際に，現実事象についても考察することができた点である。現実の問題を数学を利用して解決するときに，現実事象を数学化している。そして，数学的な見方・考え方を働かせ，数学の舞台にのせて解決をしている。このとき理想化や単純化して，数量や図形及びそれらの関係などに着目するが，現実事象について考察する機会がない。そのため，数学的結果を考察することを通して，解決の過程を振り返ることだけでなく，現実事象についても考察する機会が得られていると考える。実際に第６時において，生徒 12 は解を解釈して７段という答えを導き出した。さらに考察を加え，あまりの本数に着目し，立方体を片側に１つ重ねることができることに気が付いている（図４－４）。また生徒 17 は現実場面を考察し，計画段階であると考え，解を解釈して棒を３本追加して８段作れるとしている（図４－５）。これらは解を考察しただけでなく，本棚を作るという現実事象についても考察することができているといえる。

第３に，方程式利用の図式を提示することで，解決の過程が明確になる点である。方程式利用の図式（図３－４）を最初に提示した第２時において，生徒４と生徒 23 の学習感想ではそれぞれ，「方程式を利用することによって，より解きやすくなり上の図を左にやっていけばできる。言葉と図だと図の方が分かりやすい。」，「この図を見ていまどこの問題をやっているか確認できるのでこの図を頭に入れておく。この図便利。」と方程式利用の図式の有用性について記述されていた。図３－４を示したことにより，方程式を利用した問題解決において学習者がどの過程を行っているのか明確になり，方程式を利用した問題解決の理解を促すことができる。加えて，解の吟味・解釈が過程として示されていることから，その必要性を示すことに繋がっている。実際に第６時においても授業のまとめとして方程式利用の図式（図３－４）を提示し，解決の過程を振り返っている。

（図３－４を提示する）

T98　先生の授業では，文章題，問題が出てきて，方程式を作って，方程式を解いてまでやってきました。ただ今日の問題みたいに，方程式を使って解決したときに，解が問題の答えとしてあってる場合もあるし，解が小数や分数になって合わない場合もある。この解を問題に戻って考えた時に，解釈したり，吟味っていう確かめるってこと。―（中略）―　問題の答えとしては，解釈して，求めることができるよね。これは図式の中でいう，吟味・解釈の部分になります。

4.5　授業実践の課題

分析から授業実践の課題とその改善点を述べる。課題として，次の２点を挙げる。

○　問題解決後に条件を追加することは，数学的結果を現実事象に即して解釈することの必要性を感得しにくい。

○　条件や場面を変更して問題を解決することの必要性を感じさせることができていない。

第１に，問題解決後に条件を追加することは，数学的結果を現実事象に即して解釈することの必要性を感得しにくい点である。第６時において，問題１の解を導き，問題の答えを出した。その後，本１冊の大きさを提示し，棒の長さを200 ㎜と仮定し，解から得られた問題の答えが現実事象に適しているかどうか確認した。しかし，問題解決のあとに条件を追加して，解の吟味・解釈の活動は一問一答のような形式となった。これにより，学習者自らが数学的結果を現実事象に即して解釈する力の育成を阻害する形になっている。また，棒の長さという条件があると解の吟味・解釈は必要となるが，無い場合は解の吟味・解釈は必要ないことを暗に示している形となったからである。そのため，数学的結果を現実事象に即して解釈する必要性を十分に感じにくくなったと考える。

この改善点として，現実場面において本１冊の大きさ，問題１において棒１本の長さの条件を示すことである。

第２に，条件や場面を変更して問題を解決することの必要性を感じさせることができなかった点である。第６時において，１列の本棚を作成しようとする問題１の解決では，13 段できるという問題の答えを棒１本の長さ 200 ㎜の条件をもとに考察すると，13 段の本棚の高さが 2600 ㎜＝２m60 ㎝となる。実際に使用する本棚としては高すぎるということから，現実事象に適していないことを確認した。そのあと，本棚を２列にして解決を試みる問題２の解決を行った。しかし，なぜ本棚を２列にするのかという場面の変更の必要性を理解させることができなかった。

この改善点として，問題１は数学的な問題解決はできているが，現実的な解決にはなっていないことを理解させること，場面変更の必要性を感じることの出来る場面を設定することの２点である。

5.　本研究の結論

本研究の目的は，「方程式を利用した問題解決の授業実践を通して，数学的結果を現実事象に即して解釈する力を育成できるのか検証する」ことであった。

先行研究や教科用図書の分析を行い，授業実践の観点を定め，指導を行った。筆者の授業実践を通して，方程式の解が現実事象を考慮したときに答えとして適さない問題を扱うことで，数学的結果を現実事象に即して解釈する必要性を感得させることができたなどの成果が得られた。しかし，問題解決後に条件を追加することは解釈の必要性が感得しにくくなることなどの課題も明らかにした。

以上の研究過程を経て，方程式を利用した問題解決を通して，数学的結果を現実事象に即して解釈する力の育成に寄与できることが明らかとなった。今後の課題として，方程式を利用した問題解決だけではなく，数学を利用した問題解決において数学的結果を現実事象に即して解釈する力の育成ができるのか実践していくこととする。

引用・参考文献一覧

- 竺沙敏彦(2000)　「文章題解決における解の吟味に関する調査」　全国数学教育学会誌　数学教育研究　第６巻　pp. 119−124.
- 藤井斉亮他(2021)　『新しい数学Ⅰ』　文部科学省 2020 年検定済　東京書籍
- 国立教育政策研究所(2016)　平成 28 年度全国学力・学習状況調査　報告書　【中学校／数学】　pp. 100-106.
- 三輪辰郎(1983)　「数学教育におけるモデル化の一考察」筑波数学教育研究第２号　筑波大学数学教育研究　pp. 117-125.
- 三輪辰郎(1991)　『新・中学校数学指導実例講座２数・式』第２章　金子書房　pp. 58-68.
- 三輪辰郎(1996)　「文字式の指導序説」筑波数学教育研究第 15 号　筑波大学数学教育研究　pp. 1-14.
- 文部科学省(2017)　『中学校学習指導要領(平成 29 年度告示)解説　数学編』