

# 数学の問題解決における「着想」や「見通し」についての研究

—高等学校での授業実践において深い学びの実現を目指す—

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 植原孝仁

## 1. 研究の背景と目的・ねらい

高等学校の現場で数学を指導していると、考え方や根拠を意識せず、ただ解法や手順を暗記しようとする生徒の存在に気づく。数学の学びが、手続きを覚える学習になってしまっている生徒が少なくない。原因として考えられることの1つとして、中学までの算数・数学は少ない手続きで解までたどり着くことが多く、根拠や着想、見通しの重要性に気づきづらいことがあげられる。解法や手順の暗記の学習習慣が定着してしまうと、そこから脱却することは非常に難しい。ただ自力解決を促すだけでは、どのように頭を働かせればいいのか、特に解決の糸口を見つけることや解決に向けての見通しをもつことに困難さを感じ、ますます数学に苦手意識をもつ結果となりかねず、指導の難しさを感じる。また、生徒から受ける質問は、「なぜそのような考えに至るのか」が多い。特に受験期になると、問題解決の考え方が「思いつかない」や「見通しが持てない」等の悩みが後を絶たない。たとえ解答を見て根拠は理解できたとしても、問題解決における「着想」や「見通し」が分からないままになってしまうと、次回に類似の局面に当たっても解決の糸口を見つけられずに終わってしまう可能性がある。「着想」や「見通し」は問題解決の場面で重要であるにもかかわらず、問題集の解答には、理由や根拠の記述はあっても、着想や見通しは書かれていないことが多い。生徒が試験の解答欄に、着想や見通しを書く場面も必要性もなく、それを知る機会も少ないので、問題解決に至らない原因をつかめないままになってしまう恐れがある。また、難しい問題になればなるほ

ど、解決の糸口を見つけることに工夫や試行錯誤が求められ、「着想」や「見通し」はますます重要となる。重要な要素であるが、永井(2019)の「数学それ自身は非常に論理的に組み立てられているにもかかわらず、数学の『アイデア』はとらえどころがなく、言葉でもって完全に説明するのは難しい。たとえアイデア自体を言葉で説明することはできても、どうやってそのアイデアに到達できたのか、あるいはそのアイデアの必然性といったようなことは説明しがたい。」の通り、着想や見通しは説明しづらい要素であり、簡単には力がつかないことで、センスや才能だと考えてしまう生徒も少なくない。

数学の問題解決の場面では、着想や見通しの根底となる解決の手立てを既習事項や過去の経験をもとに見出していくことが必要となる。この場合の経験は、高等学校の数学であっても、小学校や中学校で学習したことその他、これまでの日常生活で考えた経験も含まれる。解決の手立ては、経験の積み重ねにより身につけていくことが望ましいが、これらの経験は高等学校入学の時点で大きな個人差となっている。また、数学が得意な生徒の多くは、これまでの経験からあまり自覚することなく解決の手立てを身に着けており、無意識にその手立てを使っている場合が多い。一方、数学を苦手としている生徒の多くは、問題を解決するための手立てにどのようなものがあるかを知らなかったり、知っていたとしても意識して使うことができていなかったりする。自力解決を困難にしている原因の1つがこのように存在している。前述のセンスや才能だと考えてしまう原因は、実感すること

の難しい経験の積み重ねの差と、数学が得意な生徒は無意識に手立てを使っており、しかも無意識に使っている手立てが言葉で説明しづらい点にあると考える。しかし、時間はかかるものの、経験の積み重ねにより少しずつ身につく能力である。そこで、ねらいとして、指導の工夫により生徒が「着想」や「見通し」の重要性を理解し、すぐには身につかない力なりにも着想する力や見通す力をつけるために粘り強く継続的に考え続けようとするきっかけづくりはできるのではないかと考えた。本研究では、甲府市内の高等学校普通科にて、問題解決の着想や見通しを得るための力を育成することを目的に、数学的背景、逆算思考、主体的・対話的な学びを主題とした授業実践を行った。その結果を OPP シートの記述やアンケート調査によって検証することとした。

## 2. 授業実践内容

以下の3つの授業実践を行った。

- |               |
|---------------|
| (1)数学的背景      |
| (2)逆算思考       |
| (3)発表や説明し合う活動 |

### (1)数学的背景について

2021年1月、初の大学入学共通テストにおいて数学ⅡBで「双曲線関数」を背景とする問題が出題された。双曲線関数を背景とすることが分かっていた受験生にとっては、見通しをもつことができたのではないかと想像する。数学は「階梯的である」とか「積み上げ式の学問」とよくいわれる。数学の階梯性についてしばしば躓きの原因として問題となるが、階梯性がゆえに高等学校で学んだことの多くは大学数学へとつながっており、逆に言えば、大学数学やその先の大きな理論を背景として高校の数学が存在している。そこで、すべての問題がそうというわけではないが、着想や見通しにつながる多くのことの1つとして、数学的背景を知ること、見通しをもって数学の問題を考えることのきっかけとなったり、深い学びにつながったり、さらには、

今、学んでいることが大学進学後の学びにどのようなつながるかをイメージすることで、学びに向かう力の向上が期待できるのではないかと考えた。今回は、出題頻度が高く、慣れないと見通しが立てにくい問題も多いと気になっていた数学Ⅲ「複素数平面」の1次分数変換（メビウス変換）等に焦点化し、表1のような計画で、1次分数変換等の理論を伝え、それらを背景とする問題を扱う授業を実践してみることにした。

表1 1次分数変換等の指導計画と内容

1時間目 9/27(月)	小テスト（変換の教科書レベルの基本的な問題） 基本を確認後、図形的な意味にも触れる。 発問：1点を除いたものになるときはどのような場合か。 リーマン球面、直線は半径∞の円、1次分数変換（反転は1次分数変換の特殊な場合）の話、変換は図形を図形に移す。
2時間目 9/28(火)	1次分数変換の基本とアポロニウスの円の問題を考える。 円円対応の説明。アポロニウスの円、補足として、直径の両端を求める考え方の説明。分母を0にする点は満たさないことに注意。答えが1点を除いたものになるときとならないときの違い。類題演習
3時間目 9/30(木)	1次分数変換を背景とする複素平面上の漸化式の問題。 複素数平面上といわれて複素平面の性質を考えられるか。1次分数変換の問題に気づけるか。すべての自然数nに関する命題の証明→数学的帰納法を検討。類題演習
4時間目 10/5(火)	非調和比（複比）を扱った問題を考える。 非調和比についての説明。1次分数変換で非調和比は不変。円周角や円に内接する四角形の性質をもとに説明する。
5時間目 10/6(水)	いろいろな変換（ここではジュークフスキー変換）を扱う。ジュークフスキー変換は逆変換を考えるのが難しいことなどからzを極形式、wをx+yiとおくのが基本となる。1次分数変換やジュークフスキー変換は等角写像。
6時間目 10/7(木)	ここまでのまとめ リーマン球面、1次分数変換、反転、円円対応、非調和比、ジュークフスキー変換などを確認。 問題演習（2019九州大）
7時間目 10/11(月)	入試問題演習、問題演習（2020東北大） 質問紙調査

## (2)逆算思考について

PISA や TIMSS 等の、国際的な学力調査において優秀な成績を収めているシンガポールでは、「数学的問題解決」の枠組みの中で「数学的プロセス」能力の育成を重視している。

「数学的プロセス」の中に、数学的問題解決に用いられる「思考スキル」と「発見的手法」が含まれており、「発見的手法は単純作業では解けない問題を解決するためのストラテジーである。(MOE, 2020)」とし、ストラテジーを問題解決過程に位置付けている。

表2 思考スキルと発見的手法 (MOE(2020)から筆者が作成)

数学的プロセス	思考スキル
	<ul style="list-style-type: none"> <li>・分類する</li> <li>・比較する</li> <li>・分析する</li> <li>・パターンと関係を見分ける</li> <li>・一般化する</li> <li>・演繹的に考える</li> <li>・視覚化する</li> </ul>
	発見的手法
	<ul style="list-style-type: none"> <li>・表現する (e.g. 図をかく, 表にする)</li> <li>・推測する (e.g. 試行錯誤する, 仮説をたてる)</li> <li>・過程を構造化する (e.g. 逆算して考える)</li> <li>・問題を置き換える (e.g. 問題を単純化する, 特定の場合について考える)</li> </ul>

また、塚原(2004)は、「ノンルーチンな問題を前にしてどう取り組んでよいかわからないという困難を解決するための1つの方策としてストラテジーという考え方があり」とし、ストラテジーとしての問題に対する取り組み方や考え方が問題解決能力の向上につながるとしている。今回はこれらを参考に、数学に限らず問題解決の場面でよく使われる「逆算思考」に着目し実践を行った。表1では「working backwards」を「逆算して考える」と訳したが、「逆算思考」は数学の問題解決の場面でもよく用いられるストラテジーである。逆算思考とは、求めたいものや証明したいこ

とから1つずつ逆向きにたどり、思考を構造化する方法をいう。最終的なゴールから逆算して道筋を作っていくのでゴール思考とも呼ばれる。また、日本の小学校の算数教育では、思考ツールを用いて思考の構造化を図る取り組みが多くなされているが、その中に図1のようなステップチャートといわれるものがある。逆算思考はこのステップチャートを求めたいものや証明したいことから逆にたどりながら作っていくイメージである。

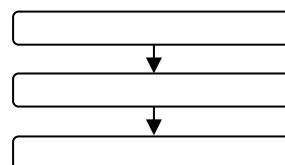


図1 ステップチャート

すぐには答えにたどり着かない問題に対して、求めたいものから逆算して思考を構造化することにより解決への見通しがよくなる場合がある。また、手順を覚えるのではなく、逆算して自分で手順を見つける意識にもつながると考えられる。本実践では数学I「図形と計量」を題材として選び、単元の後半で扱われる三角形の面積や内接円の半径を求める問題等で、複数の手続きを経て解答に至る問題に対し「逆算思考」を用いることを意識させる授業を行った。

表3 逆算思考で構造化した例

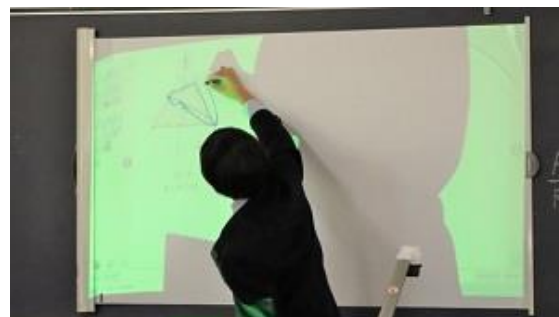
問 3辺の長さが次のような△ABCの面積を求めよ。 $a = 5, b = 7, c = 8$
sin Aを求める必要がある。 (面積の公式 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ から)
↓
相互関係によりcos Aからsin Aを求める。
↓
cos Aを求めるには余弦定理を用いる。

## (3)発表や説明し合う活動について

高等学校学習指導要領により、「主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善を進めること(文部科学省, 2018)」が示されているが、対話的な学びで着想する力や見通す力

をつけることができるであろうか。言語力育成協力者会議（第1回）清水委員説明資料に「説明を分かりやすくするために「なぜ」に答えることも必要である。「根拠となることを明らかにしそれに基づいて述べること（第一の「なぜ）」、「着想や方法に気づいたきっかけや動機を明らかにすること（第二の「なぜ）」であり、自分の考えを他者に受け入れてもらうために必要である。」（文部科学省、2006）との記述がある。根拠の他、着想や方法に気づいたきっかけや動機が説明において他者を納得させる上で必要であると説き、重要性を伝えている。また、磯田(2008)は「他者の立場の理解とは、具体的には、相手がなぜそのようなことを言ったのかなど相手の目的・意図がわかること、どうしてそのようなようになるのか、そのようにするのか、そうすることの発言の裏に隠された推論の前提としての根拠やそう考える必要がわかることに相当する。」と述べ、内容の理解とともに他者の立場の理解を通して納得は進むとしている。さらに、「数学の問題の解答は、根拠の記述のみが求められ、なぜそのように考える必要があるのか、そもそもなぜ、そのようなことを問題にしたのか（目的、意図）は記されなくなった。」と述べ、意図や必然性がわからないと納得や真の理解につながらないとしている。この場合の「そう考える目的や意図、必然性」は「着想」や「見通し」につながった経緯や理由ととれる。これらのことから、問題集の解答を見て学ぶことから得られない「着想」や「見通し」について、教師のファシリテーターは当然前提となるであろうが、説明や対話を通しての学びの場を設定することにより、他者から得ることができると考え、発表や説明し合う活動を主とする授業実践を行うこととした。実践は「着想」や「見通し」が、視覚的にとらえることで理解しやすくなることをねらい、数学 A「図形の性質」を題材として選んだ。話す側の生徒も聞く側の生徒も「着想」や「根拠」を意識して説明したり聞いたりするように促した。生徒の発表時間を

確保するために、教師側の説明時間を短縮することを目的に指導用のデジタル教科書を投影して説明する形式を採用した。生徒の発表は下の画像のように、図形を投影した上からホワイトボードマーカーで補助線や必要な記述を加えながら説明する形式で行った。



生徒による発表の様子

### 3. 授業後の OPP シートの記述

#### (1) 数学的背景の授業後の OPP の記述

問題演習を始めた当初の記述からは、過去に取り組んだ内容を忘れてしまっていることへの気づきが多数見受けられた。また、0で割ってはいけないことや必要条件で絞っていたにも関わらず十分性の確認を怠ったことなどの注意点も多かった。その中で、「除く点に注意する」や「無限遠点に変換される点が除外点になる」、「非調和比が実数であることと向かい合う角の和が $180^\circ$ であることが結びついて面白かった」、「1次分数変換の性質を知っていたので見通しが立ち分かりやすかった」など、今回の授業の趣旨に沿った形の記述も多くみられた。また、ただ問題を解くだけで終わってしまうと味わえない数学的背景の面白さや、意識することはないであろうメビウス変換やジュウコフスキー変換、リーマン球面、無限遠点等の名称は、生徒によっては興味を掻き立てる一因となったことを感じさせる記述、難関大学の問題を解くことができたことで自信につながった記述も見られた。一方で、「実際に使うとなると難しそう」や「難しかった」という記述も多く、数学的背景まで学ぶことに負担を感じる生徒も少なくなかったようだ。


表4 生徒のOPPシートの記述の一部分(数学的背景)

10/6	Y(やったこと) 1/13/12 逆算	X(気づけたこと) $W = 2 + \frac{1}{2} \times 213$	おもしろい方法。 式も面白い。 思っ。
	W(解ったこと) $W = 2 + \frac{1}{2} \times 213$	$W = 213 \times 2$ $213 = (100 + 113)$ を算入し。	

## (2) 逆算思考の授業後のOPPの記述

「逆算、すごい分かりやすかった」や「大変だけど楽しかった」、「過程がたくさんある問題は解いていて楽しかった」、「難しかったけど自分で考えて解けると楽しかった」など、逆算して考える楽しさや自力解決したときのうれしさを記述した生徒が非常に多く、予想以上の手応えを感じた。今までは、手順が少し複雑になるとやる気をなくす生徒が少なくなかったように思うが、「逆算して考える」という具体的な手立てがあると、取り組んでみようとするのがOPPシートから読み取れることがしばしばあった。その結果、「意外と解けた」につながる。楽しさやうれしさは容易に解けない（もしくは解けないと思い込んでいる）問題であればあるほど増す。そして、その喜びは次も頑張ろうとする原動力となるようである。また、「逆算意識の大切さを知った」、「パターンを丸暗記しようとせず、ゴールに向かって逆算する力が必要だとわかった」、「今までやり方を覚えようとしていたので、逆算して考えたい」など、具体的にどのような頭を働かせればよいか分からなかった生徒にとって、「逆算して考える」というストラテジーが意識できるきっかけになったことは間違いなさそうである。

表5 生徒のOPPシートの記述の一部分(逆算思考)

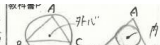
8/8	道本体の逆算問題 $S \rightarrow \sin \rightarrow \cos \rightarrow \tan$	逆算してはかた「 $x = \pi$ !
10/11	何を使えば、使えるか検討	逆算が面白い。
10/12	 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ $R$ は△ABCの外接円の半径	やり方わかった! 逆算して 何が必要か、使えるか考える。
10/11	材料を準備! → 高さが117.11 → 中身の量は → 外側の半径も! → 正確!!	逆算して考えるのはおもしろい。 問題を解くのはおもしろい。10/9 → 2 → 213!!

## (3) 発表や説明し合う活動後のOPPの記述

「○○(生徒の名前)の解き方が分かりやすかった」や「教えることができて少し自信が持

てました」、「話しながら考えるのは楽しかった」、「周りの人と考えるのはとても楽しいと思った」、「みんなの解き方を聞いて刺激になった」など、発表や説明し合う活動を好意的に受け止める生徒は多かった。実際に授業を行った際に、様々な生徒が教師の想定を越えた考えを次々に出してくることもあった。「図形の性質」の単元であったこともその要因として大きいと思うが、身近な仲間が発した解答がゆえに、自分の解答と異なる場合、自分の考えも伝えてみたいと思いつくのではないかと感じさせられた。教師が説明した場合は別の考えを持っていたとしても自分の考えを伝えようとする生徒は少ない。それは教師の説明は絶対的な解答である印象を与えてしまっているのかもしれない。また、「説明する言葉が出てこない」、「前に出て説明するとき上がるしてしまう」、「説明をもっとしっかりできるようにしたい」など、説明することの難しさを実感する生徒も多かった。説明に自信のない生徒と説明することを厭わない生徒で大きな差が生じてしまい、バランスよく発表の機会を設けることの難しさを感じた。

表6 生徒のOPPシートの記述の一部分(発表や説明)

10/13	教科書P 角の二等分線 BD: DC = AB: AC	10人の10人全員が きけたのよかったです。
10/14	教科書P 三角形の外角の二等分線と対辺の延長線の交点は二等分線	人に教えて自分の考え が分かった。
10/16	 内角の二等分線が 交わる。10人の10人 全員がきけた。二等分線	発表する準備して行く説明が 下。内角の二等分線と対辺の 延長線の交点は二等分線 今日自分も考えたことがあった。

## 4. アンケート結果

### (1) 数学的背景の授業後のアンケート結果

数学的背景の授業後アンケートは最後の第7回目の授業で質問紙によって調査を行った。調査当日は出席停止の生徒が多数であったことで、対象者31名に対し回答数が17と大幅に少なくなってしまい、信頼性の面で残念な結果となってしまった。集計結果は表7のとおりである。「見通し」や「着想」につながり、深い学びが達成できているように思う。数学的背景を学ぶことは、特に「見通し」を

もって問題解決にあたることができることとみて良さそうである。感想をみても概ね肯定的であり、良好な結果であると受け止めて良さそうだが、中には、数学的背景まで学ぶことを負担に感じた生徒もいた。

表7 数学的背景を学ぶことに対するアンケート

数学的背景（1次分数変換の性質等）を知ることで、

①問題を解く際に、見通しが良くなったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	4	11	2	0	0	17
%	23.5%	64.7%	11.8%	0.0%	0.0%	100.0%

②問題を解く際に、着想に繋がったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	2	10	5	0	0	17
%	11.8%	58.8%	29.4%	0.0%	0.0%	100.0%

③深い学びに繋がったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	6	10	1	0	0	17
%	35.3%	58.8%	5.9%	0.0%	0.0%	100.0%

④主体的に学習に取り組み態度の向上に繋がったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	4	7	6	0	0	17
%	23.5%	41.2%	35.3%	0.0%	0.0%	100.0%

⑤他の単元でも、数学的背景を学んでみたいと思うか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	8	5	4	0	0	17
%	47.1%	29.4%	23.5%	0.0%	0.0%	100.0%

⑥今回の授業の感想など

分かりやすかったり、初めて知る解き方などもあって面白かった。  
 学びが深まってよかった。  
 最初、忘れ過ぎて全然できなかったけど、最後の方は自力で解けるものもあって良かった。  
 今まで知らなかった数学的背景に触れることができ、より理解度の向上を得ることができたと思う。  
 性質を知ることによって、より理解できたが、1から自分で解くのはまだ難しいと感じている。  
 自分が知らないことを知ることができてよかった。  
 最後の東北大入試問題は、ほぼ完璧でできたので成長を感じられた。  
 自分の勉強不足ではあるのだが、数学的背景まで学ぶのは少し負担が大きかった。  
 入試問題が前より解けるようになったように感じられました。  
 少し見通しが立てられるようになった。  
 複素数平面を深く学ぶことができ良かった。  
 問題の解き方は1つではないことを頭に入れて取り組むことで視野が広がる。  
 困ったとき違うアプローチをするので問題を解けたときはうれしかった。  
 リーマン球面の話は大学の面白かった。

## (2) 逆算思考の授業後のアンケート結果

逆算思考の授業後アンケートは、授業内で調査の時間がとれず、アンケート作成ツールを用いての任意回答となり、対象者54名に対し有効回答数が25と少なくなりました。集計結果は表8の通りである。「見通し」、「着想」とも「非常にそう思う」、「ややそう思う」を合わせた回答割合は、全体の8割近くに上る。感想からも、「逆算思考」が考える上での1つの手立てとして受け入れられていると感じとれる結果となった。ただ、逆算して考えることで必ず解答に結びつくわけではなく「難しい」との本音を吐露する生徒もいた。実際の授業の場面で解答できていないと思われる生徒は、公式に当てはめる等の基本的な操作ができていない場合が多い。「逆算思考」は1つ1つの既習事項が習得できていてこそ初めて役に立つ手立てである。数学が

「積み上げ式の学問」であることを改めて思い知らされる結果であった。

表8 逆算思考に対するアンケート

逆算思考で手順を考えたことで、

①問題を解く際に、見通しが良くなったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	8	11	4	2	0	25
%	32.0%	44.0%	16.0%	8.0%	0.0%	100.0%

②問題を解く際に、着想に繋がったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	10	9	6	0	0	25
%	40.0%	36.0%	24.0%	0.0%	0.0%	100.0%

③深い学びに繋がったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	8	10	7	0	0	25
%	32.0%	40.0%	28.0%	0.0%	0.0%	100.0%

④主体的に学習に取り組み態度の向上に繋がったか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	5	9	8	3	0	25
%	20.0%	36.0%	32.0%	12.0%	0.0%	100.0%

⑤他の単元でも、逆算思考で手順を考えてみようと思うか。

	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	6	14	4	1	0	25
%	24.0%	56.0%	16.0%	4.0%	0.0%	100.0%

⑥逆算思考で手順を考える授業の感想

わかりやすかった。  
 とてもいい。  
 逆算してみることで意外と問題が解けるようになったのでよかった。  
 いつもより簡単に問題を解くことができた。  
 何を求めればいいのか分かりやすくなった。  
 まず何からすればいいかが分かりやすくなったのでよかった。  
 考え方が明確になりやすいのでいいと思う。  
 答えを導くために、こうするという考えを立てることで、迷いをせずに、解決できると思った。  
 逆算思考で自力で解いた解答によく満足しています。  
 1つ1つの手順を考えるのはいいと思った。  
 難しそうなお題でもやる気が出た。  
 難しかったけど考えるのは楽しかったです！これからは身につけたことをやっていたいです。  
 自分の知識をフルに使うことによって問題を楽しく解くことができ、解けた時は達成感があった。  
 逆算して考えることで新しい考えを見つかることができたとおもった。  
 色々な考えが知れて良かった。  
 ほかに活用できるところがあると嬉しいです。  
 図形の問題でもとても役立ちそうだった。  
 逆算して考えることの大切さを知れたが、自分で逆算で考えるのはなかなか難しいなとも思った。  
 難しい。  
 逆算しても何を求めればいいのか分からない。  
 より詳しい説明が欲しいと思った。

## (3) 発表や説明し合う活動後のアンケート結果

発表や説明し合う活動の授業後アンケートは、アンケート作成ツールを用いたが当日の出席者で端末を持っている生徒については授業内で回答する時間を確保した。対象者53名に対し有効回答数が40であった。集計結果は表9の通りである。「見通し」、「着想」とも「非常にそう思う」、「ややそう思う」を合わせた回答割合は全体の9割を超え、対象生徒は異なるものの3つの授業実践の中で最も肯定的な結果であった。感想の中で「数学が得意な生徒がどこに目をつけているのかを見ることができて、いい発見がいくつもあった」が象徴するように、解決につながった見方・考え方が、生徒の目線で語られることで、聞く側の生徒の理解が「発見」という言葉で綴られているのは、本来「受け身」のように受け取れる生徒の「聞く」態度が、「能動的に聞



く」であり、生徒が自覚しているかどうかは分からないが、主体性につながっているように感じられた。

表9 発表や説明しあう活動に対するアンケート

発表や説明しあう活動を行ったことで						
①問題を解く際に、見通しが良くなったか。						
	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	19	18	3	0	0	40
%	47.5%	45.0%	7.5%	0.0%	0.0%	100.0%
②問題を解く際に、着想に繋がったか。						
	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	18	19	2	1	0	40
%	45.0%	47.5%	5.0%	2.5%	0.0%	100.0%
③深い学びに繋がったか。						
	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	21	14	4	1	0	40
%	52.5%	35.0%	10.0%	2.5%	0.0%	100.0%
④主体的に学習に取り組み態度の向上に繋がったか。						
	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	12	19	7	2	0	40
%	30.0%	47.5%	17.5%	5.0%	0.0%	100.0%
⑤他の単元でも、発表や説明しあう活動をしてみたいか。						
	非常にそう思う	ややそう思う	どちらともいえない	あまり思わない	全く思わない	合計
度数	12	13	10	5	0	40
%	30.0%	32.5%	25.0%	12.5%	0.0%	100.0%
⑥発表や説明しあう活動の授業の感想						
みんなの考えを聞くことができて良かった。						
わかりやすいところもあった。						
教えることができて良かった。						
近くのひと協力して難しい問題を解いた時に達成感があった。						
静かに取り組むよりも周りの人と相談したり誰かの考えを聞いたりする方が、色々な考え方などを知ることができるということだけでなく自分の意見をみんなと共有できるからいいと思う。						
発表が緊張した。						
自分の考えた答えを、相手に分かるように伝える事で自分の理解も深まったので良かった。						
たまに、わかりづらい説明があって理解しきれない所があった。						
たのしかった。						
他の人の考えを知ることができて良かった。						
色々な意見が聞けるので面白かった。						
他の人と交流することで他の人の意見が分かって良かったし楽しかった。						
発表があると、先生だけの説明ではなく色々な人の考えが聞けるので違った考え方を知ることができた。						
色々な人の意見を聞いて考え方を深められたと思う						
受け身の授業よりも頭が働いて、おもしろかった						
自分が発表するのは好きではないが、他の人の説明を聞くことは楽しいし学びが深まると思った。						
理解が深まっていいと思います。						
周囲との会話がしやすく、説明をしあったりなどができたため、発表もしやすかった。						
もっとやりたい。						
友達の見聞したり、説明したりすると、学びが深まるのでいいと思う。						
納得できる。						
発表することで理解しやすくなる。						
主体的になれるので良いと思う。						
自分では思いつかなかった考え方を知り、学びが深くなるのでとても良いです。						
新しい解き方の糸口などを見つけることもできて楽しかった。						
様々な着眼点共有できて新しく知ることが多かった。						
友達のことを知れるのでいいと思う。						
新しい発見や、考えや、頭のいい人の考え方、色々な考えなど知れて楽しかった。						
色々な考え方があるから、ひとつの視点からだけでなく様々な角度から考えることが大切だと思った。						
他の人(数学が得意な人)がどこに目をつけているのかが見ることができて、いい発見がいくつもあった。図形は着目点がいっぱいあるから面白かった。						
他に自分の考えを説明できる能力がたくとと思うのでいいと思う。						
会話が増えて発表をする練習になる。						
他人の考えと自分の考えが比べられると同時に演説の練習になるいい機会だと思います。						
これからの学習は考え方が重要視されると思うので、とても良い取り組みだと思う。						
発表してると時間がかかって、あんまり進まない。						

#### (4) 尺度得点の平均比較

表10 尺度得点の平均比較

	(1) 数学的背景	(2) 逆算思考	(3) 発表や説明
①見通し	4.1	4.0	4.4
②着想	3.8	4.2	4.4
③深い学び	4.3	4.0	4.4
④主体性	3.9	3.6	4.0
⑤持続性	4.2	4.0	3.8

「非常にそう思う」を5点、……、「全く思わない」を1点として得点化し1人当たりの平均得点を比較したものが表10である。「見通し」、「着想」とも高い得点率であり、アン

ケート結果からは、当初のねらい通りの結果となった。

#### 5. まとめと考察

(1) 数学的背景についての授業として、1次分数変換等を背景とする問題を扱い、指導をする立場として非常に楽しく行うことができた。生徒にとってはやや難しい内容もあっただろうが、難しい理論だからこそその楽しさを味わった生徒も多かったと感じる。その証拠に、授業後に熱心に質問に来る生徒も少なくなかった。もちろん、受験を見据えて入試問題を解く力をつけたいという思いもあっただろうが、教科書には書いてない教科書の裏側にある理論を学ぶことに、学問としての数学の楽しさを味わえたのではないだろうか。少なくとも数学の魅力を伝える結果にはなりえたと思う。(2) 逆算思考については、予想以上に授業の感触が良かった。数学の理論とは異なり、ただの手立てに過ぎない「逆算して考える」は、それまで数学の学習が解法の暗記であった多くの生徒にとって、自ら手順を考え自力解決に至った経験を経て自信をつかむことにつながった。また、普段生活する上でも目標から逆算して現在の行動を決定していることは多いことから、現実の世界で使われている思考法が数学の世界でも使えることに気づくことができたのではないかと。実社会でも数学の場面でも、共通の頭の働かせ方があることに、改めて数学を学ぶ意義を見いだせるのだと思う。(3) 発表や説明しあう活動については、アンケートの感想の言葉を引用すると、聞く側は、「どこに目をつけているか」や「解き方の糸口」、「様々な角度から考えること」、「様々な着眼点」等を学び、発表する側も、「相手に分かるように伝える事で自分の理解も深まった」というように自分の考えを深める機会としている。第1章で述べた「無意識に手立てを使っている」状態が発表を通して認知に変化したといえよう。今回の発表でも説明の難しさを感じた生徒は多い。「わかりづらい説明もあった」というアンケートの記

述もあった。しかし、生徒は、教師からの説明よりも、他の生徒からの説明の方が大きく刺激を受けることができるのだと感じた。勉強を頑張るきっかけは様々であろうが、身近な仲間の頑張る姿も自分を頑張らすきっかけにつながっている。

3つの実践とも、OPP シートの記述やアンケートの結果から肯定的に受け止めてよいデータが得られたと考えている。すなわち、ねらいに掲げた「実践によって、生徒が着想する力や見通す力をつけるためのきっかけづくり」は概ね達成できた。但し、「着想や見通しを得るための力を育成する」という目的達成のためには、今後も継続して、生徒自らが意識して考え続ける必要がある。教員という立場でできることは、今回のようにそのための仕掛けを用意し続けることであり、サポートする立場で関わりながら、生徒自身の自律を促していきたい。

課題もいくつか浮き彫りになった。数学的背景を知っていることは強みにはなるものの、必要性が必ずしもあるというわけではない。そもそも、数学的背景をやみくもに考えればきりがなく、それを説明する側の力量も問われることとなる。逆算思考ですべてが解決するわけではなく、高校数学で身につけておきたいストラテジーは他にもいくつか存在する。また、推論の方法も、帰納、類推、演繹、アブダクションなど必要に応じて考えなくてはならない。発表や説明し合う活動は時間がかかる。今回デジタル教科書を投影しての授業を行い教師側の説明時間の短縮を試みたが、それでも、他のパートに比べて進度が大きく遅れてしまった。トレードオフの関係にあたる課題もあるが、これらの課題は今後の研究に活かしていきたい。また、今回の取り組みの中で最も困難さを感じたのは、考えることが苦手な好きではない生徒の存在である。そのような生徒は「着想」や「見通し」を考える段階以前の状態であり、対応は難しく、全体指導ではその場しのぎになっていると感じる。そして、数学が苦手な生徒は、暗記学習

のような短時間で結果が出る方法を望んでいる印象を受ける。しかし、ユークリッドがエジプトの王に「幾何学に王道なし」と言ったように、昔も今も、数学を簡単に身につける方法はない。増田(2021)は、「試験も現実の問題として大事であるが、『わかりたい』という好奇心が萎えては何も始まらない」に続けて、「数学を楽しみながら学ぶという姿勢が必要」と述べている。数学に限らず、得意となるためには、たとえ勉強であっても、その中から楽しみを見つけていく姿勢が大事である。今回の研究で最も大きかった成果は、何人かの生徒の OPP シートの記述にあった「楽しい」という言葉だったようにも思う。数学に向かう上で、「数学を楽しむ力」を育てることが最も重要で、私たちも数学を楽しみながら指導し、数学の楽しさを伝えていくことが必要なのではないかと感じ、それは、「学問の原点に戻れ」と言われている思いがした。

#### 【引用・参考文献】

- 磯田正美(2008)「アーギュメンテーションによる問題解決の指導」磯田正美・笠一生編著『思考・判断・表現による学び直しを求める数学の授業改善』(pp.19-41)明治図書
- 増田哲(2021)『なぜ数学を学ぶのか』と迷ったら『数学セミナー』2021年4月号(pp.8-11),日本評論社
- Ministry of Education Singapore(2020)「MATHEMATICS SYLLABUS Pre-University」
- 文部科学省(2006)「算数・数学の学びと言語力の育成—「筋道を立てて説明する力」に焦点を当てて—」言語力育成協力者会議(第1回)清水委員説明資料
- 文部科学省(2018)「高等学校学習指導要領(平成30年公示)」
- 永井保成(2019)「大学数学とどう付き合うか」『数学セミナー』2019年5月号(pp.8-11),日本評論社
- 塚原成夫(2004)『新・高校数学による発見的問題解決法-ストラテジー入門-』現代数学社