高等学校数学科における数学的に考える力を養う学習指導の工夫

−生徒が作業することに着目して−

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野　土橋雅生

1. はじめに

平成 28 年 12 月の中央教育審議会答申により各教科の目標や内容に関する主な改善事項が示され、これにより高等学校数学科の改訂も行われた。高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説数学編理数編の「第 2 節　数学科改訂の趣旨及び要点」によると、「数学的に考える資質・能力の育成を目指す観点から、現実の世界と数学の世界における問題発見・解決の過程を学習過程に反映させることを意図して数学的活動の一層の充実を図った。」と記されており、数学的に問題発見・解決する過程を学習過程に反映させることを重視している。

ここで数学的活動とは「事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的・協働的に解決する過程を遂行すること」である。この数学的活動は「数学学習に関わる目的意識をもった主体的活動」という従来の意味をより明確にしたものであり、今回の改訂によって数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して授業を展開することを重視している。つまり、新学習指導要領になることで生徒が授業でより主体となることができるような環境を整備し、そのための学習指導の工夫を行う必要がある。

また、新学習指導要領で評価の観点が「知識及び技能」「思考力、判断力、表現力」「学びに向かう力、人間性等」の 3 つの柱に沿って明確化された。これにより生徒がただ主体的に数学に取り組むだけでなく、日常事象等との関わりを意識した数学的活動の充実等を図っていくことが求められるようになった。そのため教科書の内容を進めるだけでなく、数学と身の回りの日常事象とを結びつけ、生徒に数学の有用性を伝えられるよう授業を工夫する必要がある。

「平成27年度高等学校学習指導要領実施状況調査」によると、「数学の学習が好きだ」という質問に対して、「そう思わない」と回答した生徒の割合が 33.9%、「どちらかといえばそう思わない」と回答した生徒の割合が 16.7%となっており、合わせて否定的な回答の割合は 50.6%となっている。つまりこの調査に回答した高校生の中で数学を好きと感じている生徒は半分もいないという現状である。

筆者は研究授業校の 1 学年のクラスにおいて、数学に対する態度に関するアンケート調査を行い、35 人から回答を得た。

(1)　数学の授業は好きだ
(2)　数学の授業は面白い
(3)　数学はほかの教科に比べて得意な方である
(4)　数学で面白い問題があれば解いてみたい

回答者 35 人のうち「数学の授業は好きだ」に対し、「強くそう思う」と回答した者は 9 人、「そう思う」7 人、「どちらともいえない」15 人、「そう思わない」4 人であった。よってこのクラスでは数学に対して否定的に感じている生徒の数は少ないものの、「どちらともいえない」という回答が多く全体としては数学が好きな人が多いとは言えない。また「数学で面白い問題があれば解いてみたい」という質問に対しては、22 人が肯定的な回答であるが、それ以外の 13 人は否定的な回答（「どちらともいえない」を含む）である。

この調査結果を受け、筆者は高校生の数学に対する意欲を高めるために、数学的活動をどのように授業に取り入れるか、具体的方法を検討するため、以下の先行研究を考察した。児童の意欲・好感度に関する要因について北村ら（2002）は、「意欲・好感度」と「理解度」「肯定的算数科」との間に有意な相関が認められたと述べている。また粟津ら（2007）は数学嫌いに関して、「数学嫌いの最大要因は数学に他する苦手意識であることが明らかになった」と述べている。これらから数学に対する否定的な意見は、生徒の「できない」「わからない」が起因していると考えることができる。

また数学の意欲に関して松原（1987）は以下のように述べている。

> 子どもは、数学を面白いと感じているときや数学の授業に夢中になっているときは、「なぜ数学を学ぶのか」などと懐疑的にならないものである。スポーツが好きな生徒が、なぜスポーツするのか、などと疑わない。

松原（1987）は生徒に考えさせる授業を展開していくうえで、まず数学を面白いと思わせる必要があると指摘している。つまり数学に対する意欲を高めることは、数学的な見方・考え方の育成にもつながると推測している。このことからも生徒の数学に対する意欲を高めていくことは重要であると言える。

そこで筆者は、生徒の意欲を高める方法として、生徒たちが具体物を用いて手を動かしたり実験したりしながら考える「作業すること」に焦点を当てた。数学の授業における「作業」に関して松原(1987)は「作業は身体的活動を伴うもの」としている。さらに、「その本質は精神活動（思考）にある」とも指摘している。このことから作業とは必ずしも身体的活動のみを指しているのではなく、生徒が思考し深めて発展させるという一連の流れのことを示している。

これらを踏まえ、筆者はこの作業を「予想する・実験する・検討する」という 3 つの流れで行い、その活動を授業に取り入れることよって生徒の数学に対する意欲に変容が現れるかどうかを目的として研究を進めた。

2. 授業実践

実習校：山梨県立Ａ高等学校　１コマ 65 分
学校タイプ：進学校　普通科
実習期間：令和３年６月～令和３年 10 月
対象：１学年の学級 40 名
日時：令和３年　10 月 12 日
単元：数学Ａ「場合の数と確率」
単元の目標：
場合の数を求めるときの基本的な考え方や確率についての知識を深め、それらの事象の考察に活用できるようにする。
題材：「モンティホール問題」
本時の目標：
モンティホール問題の内容を理解し、確率（特に条件付き確率・乗法定理）の考えを用いて数学的に考察してみよう。

本時の授業では以下のような問題文を提示した。

3 つの箱があり、そのうち 1 つがあたりである。あなたはあたりの箱を選びたい。1 つの箱を選んで開けようとすると、主催者が残った箱のうちのはずれの箱を開け、「箱の選択を変えてもいいですがどうしますか。」と言いました。あなたは箱の選択を変えますか、それとも変えないですか。

本研究授業で扱った「モンティホール問題」はかつてアメリカの名司会者、モンティホール氏がテレビ番組『Let’s make a deal』の中で行われたゲームに由来する。番組で実際に行われていたのは、プレイヤーの前に 3 つのドアがあり、1 つのドアの後ろには「新車」が入っており、残りの 2 つのドアの後ろには「ヤギ」が用意されている。あたりを選べば「新車」を手に入れることができる。このゲームに関しては 1990 年 9 月 9 日に発行されたニュ

ース雑誌『Parade』の中にて、マリリン・ボス・サヴァント氏が連載するコラムで「正解は『ドアを変更する』である。なぜなら、ドアを変更した場合には景品をあてる確率が 2 倍になるからだ。」と回答している。この投稿に対して批判の投書が相次ぎ、またその投書の中には数学の博士号を保持しているものも含まれていた。しかしそれらの批判は間違いであり、マリリン氏の主張が正しいということが後々明らかとなった。

本題材は数学者でも間違えるほどの難問ととらえられるが、実験をしてみることでどうしてそのような確率になるのかが見えてくる。本研究授業では、箱の選択を変えるべきかどうか予想をたて、実験をし、結論を出してかつ深めるという流れを重視して行うことで、生徒たちの数学に対する意欲を高めることをねらいとした。

研究授業では「モンティホール問題」について PoworPoint スライドを提示しながら説明し、生徒は以下のような質問が書かれているワークシートに記入しながら学習を進めた。

①あなたは箱を選び変えますか。また、そのように考えた理由は何ですか？
②実験からわかったこと、気づいたことを記入し、またその結果はどうして起こるのか、理由を考えてみてください。
③他のグループの中で自分のグループとは違う考えはあったか、またその考え方はどのようなものかまとめてみましょう。
④今日の授業を通してどのような力が身についたか、またその力をどのような場面で生かすことができそうか記述してください。

2.1 予想の段階

問題について授業者が説明した後、生徒は箱を変えるかどうかの予想を、ほかの生徒との意見交換はしないで、Google form に予想結果を投票した。投票結果は次のようになり、生徒に提示した。

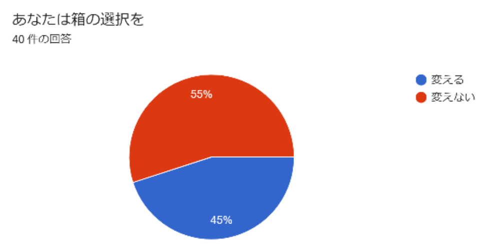

図 1　箱の選択に関する予想

上図のグラフを見ながら、生徒は予想した理由について意見交換をした。変えないと予想した生徒の中には、「いつも最初に選んだほうが当たることが多い。」や「主催者が自分をはずれの方にさせようとしていると思ったから。」などが出された。逆に変えると予想した生徒の中には、「主催者は、どちらがはずれか知っていて、はずれのほうを開けたのかな、と思ったから」と根拠があいまいな段階であるものがあったが、中にはカードを図で表すことで 3 つのカードのうちのどのカードを最初に選ぶかを考えることで、変える場合と変えない場合の当たる確率を予想の段階で考察している生徒がいた。つまり、作業をする以前に数学的に考える（場合分けをして考える）という段階に至っており、それによって根拠とともに変えたほうがいいと結論付けていた。

2.2 実験の段階

予想の段階で変えたほうがいいという意見と変えないほうがいいという意見がほぼ五分五分となっている。この集計を受け、実際は変えた時と変えない時で当たる回数にどのくらい違いが出るのか、そもそも違いは出るのかを実験を行うことで確かめる、という時間を設けた。また生徒には実験を行う中で、なぜそのような結果になるのかも併せて考えるようにと指示した。

実験を行うにあたって 3〜4 人のグループを作り、各グループに 3 枚 1 セットのカードを配った。実験の行い方に関しては授業の中で以下のように提示した。

①ホスト役を決める
②ホスト役の人はカードを選ぶ人に対して 3 枚のカードを裏向きに提示する
③カードを選ぶ人はカードを 1 枚選び、そのあとホストの人はカードを選ぶ人が選んだカード以外のはずれのカードを提示する
④カードを選ぶ人はカードを変更する場合、変更しない場合、自由に選択する場合でわけ、それぞれ何回やって何回あたりが出たかを集計する。
⑤集計結果を比較し、どの場合があたりが出やすそうか考察する。

実験回数は特に指定しなかった。カードは方眼紙を長方形に切ったものに、〇、はずれを表す×を書いたものとし、〇を「あたり」、×を「はずれ」とした。また④で提示した「自由に選択する場合」は時間に余裕がある場合にするよう指示した。

授業中の生徒の活動に関しては、多くの生徒たちが楽しく実験している様子が看取れた。また、本研究授業以外の授業ではいつも眠たそうにしている生徒も、本時の授業では積極的に参加していることが看て取れた。

10 グループの実験結果を集計したところ以下のようになった。

表１　選び変えた場合の実験結果
①選び変える場合

	あたりの数	試行回数
1 班	11	20
2 班	7	10
3 班	9	18
4 班	8	10
5 班	7	15
6 班	7	10
7 班	6	9
8 班	8	15
9 班	7	10
10 班	7	10
合計	77	127

選び変える場合については、ほとんどの班があたる回数が半分以上となっている。実際に計算してみると、

$$\frac{77}{127} = 0.6062 \ldots$$

となり、約 61%であたるという結果になった。

表２　選び変えない場合の実験結果
②選び変えない場合

	あたりの数	試行回数
1 班	5	20
2 班	2	10
3 班	5	10
4 班	2	10
5 班	1	15
6 班	4	13
7 班	7	13
8 班	7	15
9 班	4	10
10 班	4	10
合計	41	126

②の選び変えない場合については、ほとんどの班が当たる回数が半分以下となっている。この場合も実際に計算してみると、

$$\frac{41}{126} = 0.3253 \ldots$$

となり、約 33%であたるという結果になった。

この結果から、箱は「選び変える」方があたる確率が高くなるのではないかと推測できる、と生徒たちと共通理解を得ることができた。そのあとに、なぜこのような結果となるかの理由を考える時間を設けた。

2.3 検討の段階

生徒たちに考えてもらったところ、(1)変えるとあたる確率は 2/3 になる、(2)変えるとあたる確率は 1/2 になる、の 2 つの意見が出された。クラス全 40 人の中で(1)のような考えをした生徒は 26 人、(2)のような考えをした生徒は

14 人であった。考え方には次のようなものがあった。

生徒 A

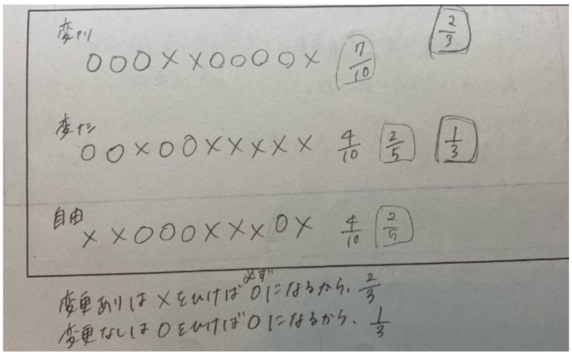

図２ 生徒 A の考え

この生徒は予想の段階で「選択を変えない」としていたが、実験をした後で変えたほうがいいとしている。考え方としては、変える場合は最初にはずれを選べば、最終的に必ずあたりを選ぶことができると気づいている。そのことから変える場合はあたる確率は 2/3、変えない場合はあたる確率は 1/3 と結論付けている。また生徒 A は変更ありと変更なしで分けて論理的に考えているため、数学的思考が促されていると考えられる。

生徒 B

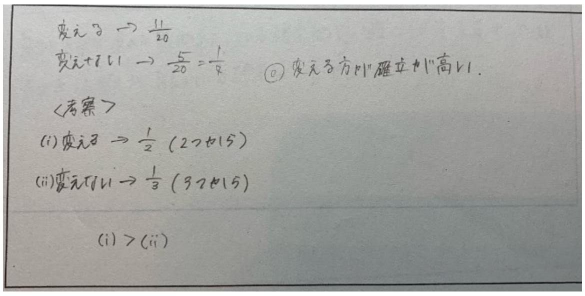

図３　生徒 B の考え

この生徒も予想の段階で「選択を変えない」としている。実験の後では変えるほうが確率が高いとしており、実際にその確率がどのようになるかについても書かれている。しかし生徒 A と違う点は、変える場合のあたる確率を 1/2 としていることである。ワークシートの記述では、生徒 B は選択を変えるときは残った２つから選ぶことになるから 1/2 としているが、選択を変えない場合の理由は、生徒 A と同様の記述である。しかし、生徒 B の記述は数学的には根拠が薄いため十分に数学的な思考による記述であるかどうかは不明である。

生徒 C

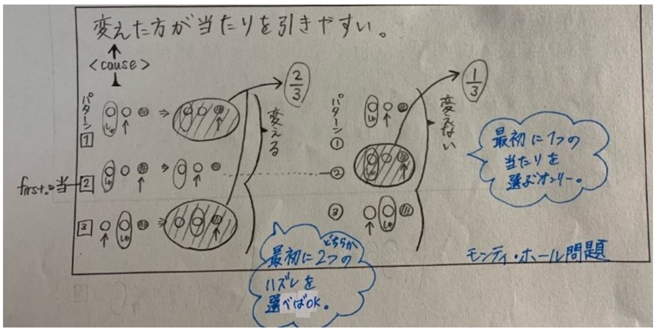

図４　生徒 C の考え

この生徒は予想の段階で「選択を変える」としている。実験を通して自分の考えを図で表し、場合分けをして説明している。またこの生徒 C はクラスの中でも比較的数学が苦手な生徒であったが、なぜ変えたほうが良いのかを図や数字、言葉を用いて数学的に考えることができている。

生徒 D

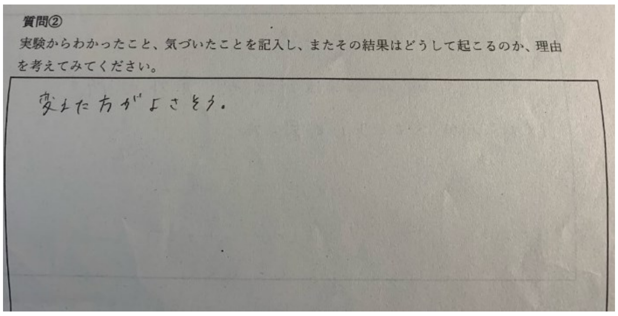

図５　生徒 D の考え

生徒 D は予想の段階で「選択を変える」としていたが、その理由として「変えたほうが良さそうだから」と漠然とした記述である。また実験を通した考察の時間でも、「変えたほうが良さそう」としか記入されておらず、自身で選択の根拠を明らかにしておらず、数学的な思考が十分に促されてていないとみて取

れる。

2.4 結論の共有

前述のように、実験の段階ではほとんどの生徒が「選択を変える」ことで、あたる確率が高くなるとしていた。しかし、その確率値は 2/3 と 1/2 の 2 つの意見に分かれたため、どちらが正しいか再考察をする時間を設けた。

確率は 2/3 になると考えた生徒の説明では、「選択を変えない時は最初にあたりを引く確率がそのままあたる確率になる。選択を変えるときは、最初にはずれを選べば選択を変えた時にそれがあたりとなるから最初にはずれを選ぶ確率 2/3。」であった。一方確率は 1/2 になると考えた生徒の説明は、「ホストの人がはずれを 1 つ明らかにすることで残りは 2 枚になる。そこからあたりを選ぶということになるから確率は 1/2 になる。」であった。これらの生徒の意見の後、授業者が選択を変える（選択を変えない時も同じ）時点で何を選ぶかが決まってしまうので、2 枚の中から 1 枚を選んでいるわけではないと説明した。その後、生徒のなかから「確率が 1/2 にはならないなと思えてきました」という反応もあり、それ以外の生徒たちもそれで納得しているようであった。

結局、モンティホール問題は箱を選び変えたほうがあたる確率は高くなり、その確率値は 2/3 である、と授業者がまとめ、生徒たちもその結論で納得の様子であった。

2.5 深める時間

本時はモンティホール問題を既習である条件付き確率、乗法定理と結びつけることが目標である。そこで、田中・上野(2013)の説明を参考に、授業者が次の図 6 のように板書したうえで説明した。

今までやった確率の知識で表してみよう！

最初にあたりを選ぶという事象を $\boldsymbol{A}$
最初にハズレを選ぶという事象を $\boldsymbol{B}$
最終的にあたる事象を $\boldsymbol{H}$　　　　とする。

求めたい確率は　$\boldsymbol{P(H)}$

$$P(H)=P(A\cap H)+P(B\cap H)$$

図 6　説明資料（田中・上野 2013）

ここで、乗法定理から

$$P(A\cap H)+P(B\cap H)$$
$$=P(A)P_A(H)+P(B)P_B(H)$$

となる。$P_A(H)$と$P_B(H)$の値がどのようになるかを先に考えてみる。

「選択を変える」場合は、事象 A が起これば必ずはずれになり、事象 B が起これば必ずあたりになる。つまり

$$P_A(H)=0\quad P_B(H)=1$$

となる。

$$P(A)=\frac{1}{3}\quad P(B)=\frac{2}{3}$$

なので、

$$P(H)=P(A)P_A(H)+P(B)P_B(H)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

となり、あたる確率が $\frac{2}{3}$ になるのがわかる。

同様に「選択を変えない」場合も考えることができ、この場合は

$$P_A(H)=1\quad P_B(H)=0$$

となるので、

$$P(H)=P(A)P_A(H)+P(B)P_B(H)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{1}{3}$$

となり、あたる確率が $\frac{1}{3}$ になることがわかる。

3. 学習感想の分析

授業の終わりには、ワークシート設問④により、この授業を通して身についた力について学習感想を記述させた。「2.2.検討の段階」でとりあげた 4 人の生徒の学習感想は以下の

とおりである。

生徒A

最初運だったり心理だったりで問題に取り組んだけど、数値的に考える力も使うことができた。こういう確率を求めて勝負の時に得する機会があったらいいなと思った。

生徒B

学校で学習した内容を利用して身近なことに利用できる力が身についたと思います。このようなシチュエーションになったら変えたいと思った

生徒C

確率を、事象を巻き込んで考える力がついた。今まで苦手で解けなかった問題で利用して克服できるようになれればいいと思った。
最初は割と心理的な面で考えるほかなかったものが、数学的思考で解けたことに感動した。
そうか、変えるか変えないかで分けて、この2つの試行でのあたりを引く確率は別と考えればいいのか、と気づかされた

生徒D

条件付き確率・乗法定理が意外なところで使えるのが面白いと思った。

生徒 A の学習感想からは、直観的な思考から数学的な思考への移行が見て取れる。また数学の有用性を感得したことが推測できる。生徒 B の学習感想では、数学で学習したことを身の回りに応用しようという意欲がみられる。生徒 C の学習感想からはモンティホール問題を数学的に考えることができることに感動している様子がうかがえる。また確率の場合分けについても理解ができていることが見て取れる。生徒 D の学習感想からは教科書で習ったことが意外なところで使えることについて述べていて、その意外性から数学の面白さを感じている。しかしどのような力が身についたかの記述がないため、授業者は授業時にもう少しこの点について強調するべきであったと感じている。これら 4 人の生徒以外の学習感想に、「数学が役に立つ」や「これからも数学を使っていきたい」という記述が多数みられた。

4. 終わりに

(1)成果と課題

以上の研究の結果から、この教材による授業は生徒に数学の有用性を感得させることができたと考えられる。事後アンケートでは「数学が好きだ」という質問に対して「強くそう思う」5 人、「そう思う」15 人、「どちらともいえない」14 人、「そう思わない」2 人、「全くそう思わない」1 人という結果になり、事前アンケートと比べ肯定的な意見が多少多くなった。また事後アンケートにより数学的に考えることについて問うたところ次のグラフのようになった。このグラフから肯定的な回答が 70%近くあり、大半の生徒が数学的に考えることの大切さを感じてると思われる。

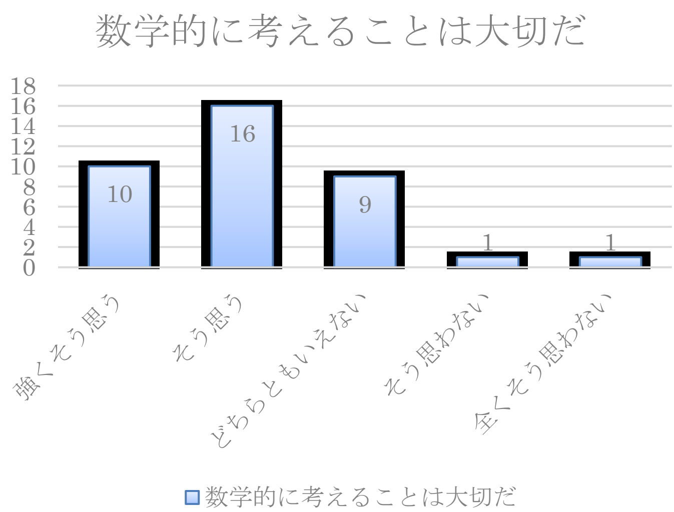

図７　数学的思考に関するアンケート結果

しかし、この授業によって生徒が「作業」することに意味を感じたかどうかについては、確かな結果が得られなかった。また、数学的に考える力が身についているかどうかについても十分には明確にならなかった。

モンティホール問題は今では YouTube などの動画配信サービスの紹介動画を見ることができ、今回の授業でも、「先生、私この問題この前 YouTube で見ました。」と教えてくれた生徒がいた。しかしその生徒は、はじめ「箱を変えたほうがいいというのはわかっていても、なぜ変えたほうがいいのかわからないです。」と言っていたのが、授業の終盤では「なぜ変えたほうがいいか理解できました！」と授業者に話しかけてきた。

授業内では最後に「条件付き確率・乗法定理」と結びつけて説明をしたが、授業感想の中にはこの内容があまり理解できなかったという記述があり、もっと工夫が必要であったと感じた。

⑵今後について

本研究において数学の授業における作業することと数学に対する意欲向上とを結びつけることにまだ課題があると感じた。よって今後は生徒が作業することに意味を見いだせるような教材研究を検討したいと考えている。授業感想の記述を見ても作業したことについての記述はあまり見られなかったことから、生徒は作業を単なる授業過程としてとらえていたかもしれない。次年度の研究としては生徒が作業することにより着目できるような教材づくりに励み、またその教材と数学的思考とを結びつけられよう検討を重ねていく。

5. 引用・参考文献

・粟津俊二・竹内光悦（2007）「社会科学系女子学生における数学嫌い・数学学習意欲の分析」実践女子大学人間社会学部紀要，3，pp.167-176

・市川伸一著 (1998)『確率の理解を探る』　共立出版

・北村剛志・森田愛子・松田文子（2002）「児童の算数学習への意欲と関連要因」広島大学心理学研究，2，pp.109-117

・黒﨑東洋郎（2018）「機能する「数学的な見方・考え方」の育成の在り方」　岡山大学算数・数学教育会誌パピルス第 25 号 pp.38-44

・桑原利通（2018）「高等学校数学科における統合的・発展的に考察する力を高める学習指導の工夫―解決の過程や結果を振り返り，新たな数学の事象につなげていくパフォーマンス評価を通して―」，平成 30 年度教員長期研修（前期）教員長期研修生の研究，広島県立教育センター

・西村圭一（2001）「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」日本数学教育会誌 83(11), pp.2-10　11-01

・西村圭一（2001）「数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究ー高等学校数学科を中心にー」東京学芸大学数学教育研究 第 13 号　pp.125-134

・松原元一編著 (1987)『考えさせる授業』　東京書籍

・柳本哲（2008）「数学的モデリングと数学的活動ー社会を切り開く人間教育に向かってー」数学教育学会誌　Vol.49　No.3・4 pp.9-16

・山本武寿（2014）「高等学校数学科における課題学習の実践的研究」愛知教育大学数学教育学会誌イプシロン Vol.56, pp.121-126