「単位量あたりの大きさ」の指導に関する一考察

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 初等教育分野 山口国之

1. 研究の目的と方法

全国学力・学習状況調査報告書によると，第5学年C変化と関係（2）異種の2つの量の割合において課題がみられた. 令和3年度の,「速さを求める除法の式と商の意味を理解しているかどうかをみる」問題，平成30年度，平成25年度の,「異種の二つの量の割合として捉えられる数量について，その比べ方や表し方を理解しているかどうかをみる」問題でいずれも，除法の式と商の意味を捉えることができていないことが明らかになった．また平成26年度の,「2つの数量関係について，単位量あたりの大きさを調べる場面と図とを関連付けることができるかどうかをみる」問題では単位量あたりの大きさを求める場面において，図から式へ正しく関連づけることができていないことが明らかになった.

なぜ，式や商の意味を捉えることができず，図や式が関連づけられないといった実態があるのだろうか.

私は，単位量あたりの大きさ（異種の量の割合）において，子どもたちが割合の本質である倍の考えで比べることや，比例関係を前提として捉えられていないのではないかと考える．問題場面を比例関係と捉えられなければ，その場面を正しく図や数直線に表すことはできない．そして，数直線から正しく立式し図から商の意味を解釈することもできない.

単位量あたりの大きさは異種の 2 量の割合（内包量）を比べる初めての場面である．既習の比べる場面は1量（外延量）同士の大小比較であった．これまで1量を差の考えで比較してきた子どもたちにとって，2量の割合同士を比べる場面でも差で考える子もいるのが自然ではないか．また第4学年では，簡単な場合についての割合において倍の考えで大きさを比べたが，それは同種の2量（内包量）の比較である．同種の2量の比較で倍の考えで比べることは認めたが，異種の2量の比較で倍の考えが使えることは触れていないので,子どもたちは既習の差の考えで解決するのではないか.

早川(2003)は「『同じ割合をつくる』活動を導入指導で行うことで，同じ割合をもとにして『比例の見方』を養うことができた.」(p.23) と述べている．これは同種の量の割合での実践であるが，異種の量の割合においても導入指導で「同じ割合をつくる」活動を行えば，子どもたちは 2 つの数量の間に比例関係が内在していることに気づくことができる．そして，2量の割合同士を比べる場面では，比例関係を前提として，差の比較ではなく倍の見方で比べることができるのではないか. 比例関係を前提とすれば，数量関係を正しく捉え，正しく図に表すことができる．その図から商の意味を捉えることもできる．また，比例関係と見ることで比例関係が内在する数直線に表すことができ．それを根拠に立式し，数直線や図を関連づけることで式の意味や商の意味を捉えることができる.

そこで本研究の目的を,「『同じ割合をつくる』活動を導入場面に位置付けることで，異なる割合を比べる時に，割合概念の本質である，倍の考えで比べることや比例の考えを前提として問題を解決できるか明らかにすること．そして比例関係が内在する数直線，図や式といった数学的表現を関連づけることで，式や商の意味を正しく捉えられるか明らかにすること.」とした.

研究の方法として，先行研究にあたり指導

への示唆を得ること．全国学力・学習状況調査（R3，H30，H26，H25）から課題と改善例をまとめること．そして，そこから得た知見をもとに授業実践を行う．授業実践で得た，子どものノート記述，プロトコル，板書などから目的が達成されたか明らかにする．

2.研究内容

(1)同じ割合を導入に扱うこと

早川（2003）は，同種の量の割合において，「同じ割合を追求する場面を導入に扱うことで，同じ割合をもとにして『比例の見方』を養うことができた」(p.23）と述べている．他にも比例関係を顕在化させる研究はいくつか実践されている．（青山,2013;田端,2003）しかし，いずれも同種の量の割合での実践で，異種の量の割合での実践は見られない．

本研究では，第５学年「異種の量の割合」の指導に焦点をあてる．これまでの「単位量あたりの大きさ」の指導は，1時間目で「どちらが混んでいるか」割合の違いを比べてきた．本研究ではその前に同じ割合，つまり「同じ混み具合」について考察する時間を導入に扱う．

そのことで，異種の量の割合において，子どもたちが 2 つの数量関係を比例として捉えることができると考える．そして，混み具合を比べるときは，比例関係を前提として 2 量の割合同士を比べることができ，比例関係が内在する乗法・除法の数直線を活用して問題解決していくことができる．さらに，それに合った数量関係を図や数直線に表すことができ，式の意味や商の意味についても捉えることができる．

(2)指導の工夫

①必然性のある問題設定

導入で扱う場面は病気の感染対策を設定した．実際に各施設で 1 人あたり 3 ㎡の間隔を取ることが感染予防として有効な数値であることが示されている．

	人数（人）	面積（㎡）
家庭科じゅんび室	10	30
体育そうこ	□	42

家庭科準備室（10 人 30 ㎡）を基準とし，体育倉庫に跳び箱を取りに行くと想定する．「家庭科じゅんび室と体育そうこが同じこみぐあいなら，□は何人になりますか.」と問題を設定し，密にならないように体育倉庫には何人入っていいか考えていく．

体育倉庫以外にも 1 人あたり 3 ㎡の同じ混み具合を，学校の様々な場所でつくることで感染予防に有効な人数を求めることができる．つまり「同じ混み具合をつくる」ことに必然性が生まれる．

②比例関係を捉えやすい数値設定

倍の考え	人数（人）	面積（㎡）
放送室	5	15
家庭科じゅんび室	10	30
体育そうこ	14	42
教室	20	60
家庭科室	30	90
図書室	60	180
体育館	272	816

家庭科準備室と体育倉庫以外の場所を考えていく際に，比例関係が見えやすいような数値を設定した．等分比例で求める放送室を設定することで，1 あたりの大きさにも着目できるようにした．

3.授業実践の概要

(1)本時の学習

①　授業について

令和 3 年度山梨県内の公立小学校第 5 学年 28 名を対象に行った．

②　本時のねらい

「同じ混み具合」に着目して，「混み具合」を比例関係として捉えることができる．

(2)指導計画（全 11 時間）

単元名　「比べ方を考えよう（1)」

第 1 次　こみぐあい

・「同じ混み具合」を調べ，割合の意味を理解する・・・・・1 時間目（本時）

・1 人あたりの面積と 1 ㎡あたりの人数・・・・・・・・2 時間目（本時）

・面積と人数が異なる場合の比べ方

　　・・・・・・・・3 時間目

第 2 次　いろいろな単位量あたりの大きさ

・人口の混み具合（人口密度）

・米のとれ具合

第 3 次　速さ

・速さは単位量あたりの大きさで表せることを理解する

・速さを求める

・道のりを求める

・時間を求める

第 4 次　まとめ

・単位量あたりの考えを活用して解決する

・学習内容の定着を図る

4.同じ混み具合に焦点をあてた特設授業

(1)同じ混み具合をつくる活動（1・2 時間目）

①指導の実際

【1 時間目（本時)】

問題「家庭科準備室と体育倉庫が同じ混み具合になるとき，体育倉庫の人数は何人になりますか.」から子どもたちは体育倉庫の人数を求めていった.

	人数（人）	面積（㎡）
家庭科じゅんび室	10	30
体育そうこ	□	42

まず，rm 児のひき算の考えと，hr 児のわり算の考えを取り上げた．rm 児は 30−10＝20, 42−20＝22 で 22 人と答えを出した. hr 児は 30 ÷10＝3, 42÷3＝14 で 14 人と答えを出した. ここでは，ひき算は「−20 が同じ」「面積−人数＝20」が同じといった差の考えと，「÷3 が同じ」「面積÷人数＝3」が同じといった倍の考えを明らかにした.

次に，課題「ひき算かわり算かどっちが同じ混み具合でしょうか」から，差の考えで同じ混み具合をつくっていった.（表 1）

図書室，体育館と段々と面積が広くなるにつれ，差の考えでは同じ混み具合をつくれそうにないことに気づいていった.

そして，倍の考えで同じ混み具合をつくっていった.（表 2）

表 1

表 2

表から気づいたことはないか問うと hr 児は「C:ええっと，面積の数と人の数が比例している.」と比例の関係に着目した．教室の人数 20 人が家庭科準備室の 10 人の 2 倍になっていて，面積も同様に 2 倍になっていて比例していることをわり算の表から示した．差の考えでできた表と倍の考えでできた表を比べて，倍の考えで同じ混み具合を求めることを明らかにした.

【2 時間目（本時)】

1 時間目の表から，同じ混み具合を式や図や数直線に表し，式や商の意味を考えていった.

まず「1 人あたりの面積 3 ㎡」について図で表せないか問うた．ti 児は A 部屋（1 人 3 ㎡）を図で表し，3 の意味を問うと「C：1 人あたりのエリアが同じ.」と発言し，放送室（5 人 15 ㎡）家庭科準備室（10 人 30 ㎡）も図で表し，どこも「1 人あたりの面積が 3 ㎡」で同じ混み具になっていることを明らかにした.（図 1）

そして図から式で表せるか問い，放送室から体育館まで式で表していった.（図 2）

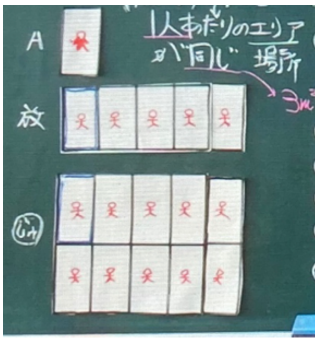

図 1

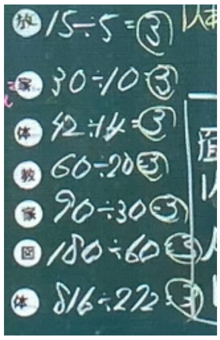

図 2

改めて商の 3 の意味を問い，子どもの「C:1

人当たりの面積.」「C:面積÷人数.」の発言から，図と商の意味を関連づけて明らかにした．

そして，数直線に表せないか問い，同じ混み具合の関係を数直線に表していった．（図 3）

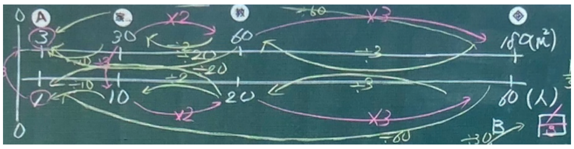

図 3

ここでは，1 時間目で出た比例関係を再度数直線上で示し．面積÷人数＝1 人あたりの面積とまとめていった．

「1 人あたりの面積 3 ㎡」と同様に，「1 ㎡あたりの人数 1/3 人」についても式や図，数直線で表し，人数÷面積＝1 ㎡あたりの人数とまとめていった．

②考察

（ア）差で考える児童の実態

同じ混み具合を求めるとき，差の考えが 9 人，倍の考えが 18 人だった．混み具合の人数と面積の 2 量の関係を，比例関係として捉えられていない児童の実態が明らかになった．

	人数（人）	面積（㎡）
家庭科じゅんび室	10	30
体育そうこ	□	42
差の考え　42―20＝22・・・ 9 人		
倍の考え　42÷ 3＝14・・・18 人		

18 人は倍の考えで正答していたが，その中にも倍の考えでよいか判断に困っている児童がいることが学習感想から見とることができる．ka 児「最初全然式が分からなかったけど，色々気づいた事があってやり方がわかるようになりました.」si 児「最初ひき算かわり算か，分かりにくかったけど，面積を大きくしたり小さくしたりすると，分かりやすい.」この 2 名は倍の考えで正答しているにも関わらず，ひき算かわり算かどちらで解決するか迷っていた．比例関係を捉えることの困難さが明らかになった．

（イ）差の考えと倍の考えを見比べること

早川（2003）は，「割合の学習をはじめた児童の中には，比例関係のある 2 量を差で見ていくと考えやすいと思っている子が多い．だから，割合の導入授業では，まず，差で考えたらよいのか，倍で考えたらよいのかを対立させることが大切になる.」（p.28）と述べている．

同じ混み具合について面積が大きくなる図書室や体育館の人数と面積を比べる場面で子どもたちの多くは，差の考えは正しくないのではないかと捉えていた．

図書室（160 人，180 ㎡）

C：全校，入っちゃう．

T：全校何人ですか.

C：161.

体育館（796 人，816 ㎡）

T:ひき算の考えで体育館とかみてどうですか.
同じ混み具合って言えそう．

C：いや.

そして，倍の考えが正しい根拠を差の考えと比較することで明らかにしていったことが，子どものノート記述，学習感想プロトコルから明らかになった．

ss 児は 1 時間目の自力解決では，差の考えだった．（図 4）

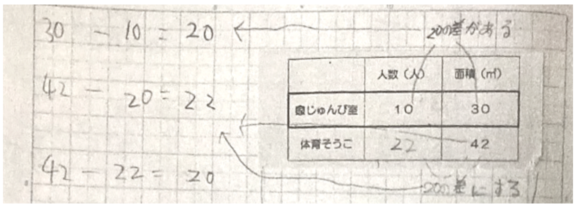

図 4（差の考え ss 児）

しかし，倍の考えと差の考えを比べる時に，差の考えではおかしいことに気づいている．ノート記述からは「ひき算の考えより数が少ない.」学習感想からは「わり算で求めたらひき算よりあっとう的に人数が少なく.」と倍の考えが正しい根拠を差の考えと比較することで明らかにしていた．

sy 児も自力解決では差の考えだった．しかし，わり算の表と見比べる場面で，「けっこう人数のよゆうが（倍の考えだと）ある．−20 だと面積がでかくなれば人数も大きくなる.」と倍の

考えが正しいことを記していた.（下線筆者）

また倍の考えの ry 児は「ひき算は体育館の人数は 796 人だけど，わり算は 272 人におさまった.」mk 児は「ひき算の時は 20 だから，どんどんふえていってしまったけど，わり算は面積の 1/3 だから混まないで入れそう.」と差の考えの ss 児や sy 児と同じように倍の考えが正しい根拠を差の考えと比較することで明らかにしていた.

⑵異なる混み具合を比べる活動（3 時間目）

①指導の実際

問題「教室の混みぐあいの順番を調べよう」から子どもたちは，まず面積がそろっている A と B を比べ面積が同じ場合は人数が多い B が混んでいること. 次に人数がそろっている B と C を比べ人数が同じ場合は面積の小さい B が混んでいることを明らかにしていった.

	人数（人）	面積（㎡）
A	4	20
B	6	20
C	6	24

そしてどちらもそろっていない A と C について「人数か面積どちらかを同じにして A と C を比べる方法を考えよう」を課題に設定し考えていった.

まず「公倍数の考え」が出された. 人数を 12 人にそろえ面積 A : 60 ㎡，C : 48 ㎡で人数が同じなので面積の小さい C が混んでいると答えを出した. 他にも面積を 120 ㎡にそろえ人数 A : 24 人，C : 30 人で面積が同じなので人数の大きい C が混んでいると答えを出した.

次に「1 人あたりの面積の考え」が出された. A は 20÷ 4 ＝5，C は 24÷6＝4 で 1 あたりの面積で比べると, 数の小さい C が混んでいると答えを出した. 出された式の数の意味や商の意味を問い，関係を数直線で表した.

そして「1 ㎡あたりの人数の考え」も出された. 商の意味を問うと ge 児は「C:1 ㎡あたりに 0.2 人の時と，1 ㎡あたりに 0.25 人の時では, 1 ㎡あたりに 0.25 人の方が，えっと，1 ㎡あたりの中では，たくさん入っているので，答えは C の方が混んでいると言えます.」と答えた.

その後 D の部屋（10 人 45 ㎡）を比べる場面を設定し 1 あたり大きさで比べる考えのよさに気づき，混み具合を比べる時は，1 人あたりの面積や 1 ㎡あたりの人数で求められること，2 つの数量を組み合わせて表した数量のことを単位量あたりの大きさということをおさえた.

②考察

（ア）比例関係を前提として解決すること

1 時間目から 3 時間目の子どもの変容は以下の通りである.

1 時間目	
差の考え	9 人
倍の考え	18 人

3 時間目	
差の考え	2 人
比例を前提とした考え	26 人

（のべ人数）

1・2 時間目に同じ混み具合をつくる活動を行うことで，3 時間目の混み具合を比べる活動では, 差の考えで解く児童は 9 人から 2 人に減少した. 比例を前提として解決する児童は 26 人いた. 問題場面を比例を前提として捉え，混み具合を比べることができたと考えられる.

では子どもたちが比例の関係に気づけた場面はどこか考察していく.

hr 児は 1 時間目でひき算とわり算の表を見比べて気づいたことはないか問うと，「C:ええっと，面積の数と人の数が比例している.」と混み具合で表される一方の数量（人数）が 2 倍 3 倍になったら，もう一方の数量（面積）も 2 倍 3 倍になっていることを明らかにした.

この発言の前までは, 同じ混み具合を面積÷人数＝3 が同じといったように，倍の考えで求めているが比例関係までは顕在化していない. しかし，hr 児の言葉で数量の関係に比例関係が成り立っていたことに気づくのである.

第 5 学年では変化の関係のような簡単な場合について比例の関係を知ることが学習指導要領に示されている. 面積÷人数＝3 のような

対応の関係の見方は，第6学年で指導されるが，第5学年の比例の学習においても，「伴って変わる2つの数量の関係を表や式を用いて表し，変化や対応の関係についてのさらなる特徴を見いだしていくことも大切である」と学習指導要領に示されている．子どもたちは，何が同じか問うた時に，「C：÷3が同じ.」と答えた．3という数値は混み具合での「同じ割合」であり，第6学年では「比の値」「きまった数」として扱われ，中学校では，「定数としての文字a」として扱われる．

子どもたちは，hr児の発言によって，既習の比例の単元で学んだ変化の関係が，混み具合に内在していることに気づき，混み具合といった2つの数量（人数と面積）には，比例関係が成り立っていることに気づけたのである．

なお，子どもたちは2時間目で同じ割合の「3」の意味について理解していく．1時間目で面積÷人数＝3の「3」つまり，同じ混み具合の人数を求めるための数としての捉えであった「3」が，2時間目に図や数直線と関連づけることで「1人あたり3㎡」とその意味を確かなものにできたのである． 面積を基準にした時の「1㎡あたり1/3人」の「1/3」についても同様である．同じ混み具合をつくる活動で比例関係を捉えられたからこそ商の意味を正しく理解できたと考える．

（イ）1あたりの大きさで考えること

	人数（人）	面積（㎡）
A	4	20
C	6	24

3時間目の基準の異なるAとCの混み具合を比べる活動では1あたりの大きさで考える児童が18人いた．

1人あたりの面積	13人
1㎡あたりの人数	5人
1あたりの大きさで比べる	18人

混み具合を比べるときに1あたりの大きさで考える児童が多かった理由として，同じ混み具合をつくる活動（2時間目）で1人あたりの面積と1㎡あたりの人数を子どもたちが数直線で表したことが挙げられる．

1人あたりの面積を表した数直線（図5）では，A（1人3㎡）家庭科準備室（10人30㎡）教室（20人60㎡）図書室（60人180㎡）を倍比例や等分比例でどの場所も「1人あたり3㎡」で「同じ混み具合」になっていることを確かめた．

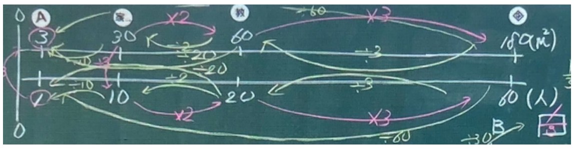

図5

1㎡あたりの人数を表した数直線（図6）では，どこも「1㎡あたり1/3人」で「同じ混み具合」になっていることを確かめた．

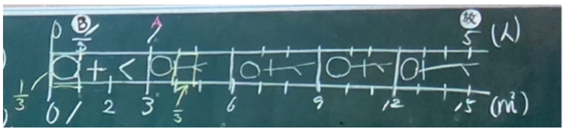

図6

「同じ混み具合」を数直線上に表すことで，3と1/3といった同じ割合をもとにして様々な同じ混み具合をつくっていくことができたと考える．

また，数直線上に表すことができるということは，子どもたちが比例関係を捉えることができているとも考えられる．AとCといった基準の異なる2つの数量をそれぞれ数直線に表し，1あたりの大きさ（割合）同士を比べることができたのである．

（ウ）図や数直線から商の解釈を行うこと

単元後の評価問題から式の意味や商の意味を理解していたことが明らかになった．

（問題）下の表は，こうたさんの町の2つの公園の面積と，昨日午後4時に公園にいた人の人数を調べたものです．どちらの公園がこんでいましたか．

公園の面積と人数

	面積（m^2）	人数（人）
東公園	300	40
西公園	400	50

実施前は，式の正答率が90%に対し答えの正答率は3%であった．面積÷人数の立式は

できているが，数値の大きい西公園を混んでいる公園と答えていた．式の意味や商の意味を捉えることができないといった全国学力・学習状況調査の結果と一致する．しかし，単元実施後は式の正答率が 100%で答えも 97%の正答率（計算間違え１人）であった．また，面積÷人数だけでなく人数÷面積を立式し正答していることから，式の意味や商の意味を理解していることがわかる．

単元前

式	類型１	３００÷４０＝7.5 ４００÷５０＝８	正答	0.90
	類型２	３００÷４０＝7.5 ４００÷５０＝８ 7.5＋８＝１５.５	誤答	0.10
	類型３	３００÷４０＝７５ ４００÷５０＝８０		
	類型４	40/300-50/400=160/1200-150/1200=10/1200=1/120		
答え	類型１	東公園	正答	0.03
	類型２	西公園	誤答	0.97

単元後

式	類型１	３００÷４０＝7.5 ４００÷５０＝８	正答	1.00
	類型２	４０÷３００＝０.１３ ５０÷４００＝０.１２５		
	類型３	３００÷４０＝７５ ４００÷５０＝８０	誤答	0.00
	類型４	40/300-50/400=160/1200-150/1200=10/1200=1/120		
答え	類型１	東公園	正答	0.97
	類型２	西公園	誤答	0.03

このことから，同じ混み具合を作る活動を導入時に取り入れることは，混み具合を比べる場面において比例関係を前提として，解決していくために有効であることがわかる．

また，３時間目に１あたりの大きさで比べた児童が式の意味と商の解釈を正しく捉えているか見ると，以下のように１人あたりの面積で比べた １ 人を除いて全員が商の大小から判断し答えが出せていた．つまり商の意味を理解していたといえる．

正答の人数	式の意味	商の解釈	
１人あたりの面積	13	12	92%
１㎡あたりの人数	5	5	100%

これは１・２時間目で比例関係を捉え，正しく図や数直線に表し，式の意味や商の意味を解釈できたからである．

ge 児（１㎡あたりの人数の図）は２時間目，１㎡あたりに 1/3 人の商の意味を以下のような図で表した．（図 7）

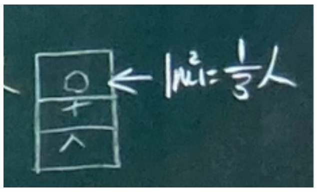

図 7

３時間目，4÷20＝0.2 で１㎡あたりに 0.2 人，6÷24＝0.25 で １ ㎡あたりに 0.25 人の商の意味を ge 児は２時間目と同じように以下のように図で表した．（図 8）

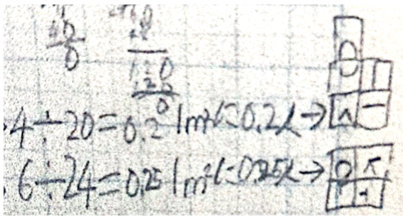

図 8（ge 児１㎡あたりの人数の図）

２時間目の１㎡に 1/3 人いる時の図を想起し商の意味を捉えようとしていることが伺える．はじめ式から出された小数や分数で表された商の意味を，子どもたちはなかなか想起できないでいた．しかし，図に表すことで商の意味を１㎡あたりの人数と解釈することができた．

ka 児は，３ 時間目に １ 人あたりの面積を求めた．商の５と４を単純に数が大きい方が混んでいるとするのではなく，図に表し再度その意味を見直すことで「1 人あたりの面積がせまい C が混んでいる．」（図 9）と商の意味を正しく解釈することができた．

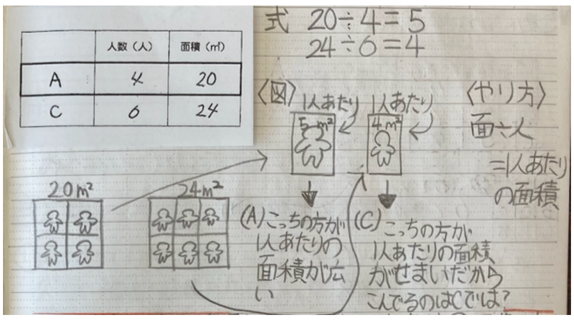

図 9(ka 児　図から商の意味を解釈)

ss 児は，第 2 次の米のとれ具合でも 1a あたり 52kg とれた図と 49kg 取れた図を以下のように記し，商の意味を把握していた.（図10）混み具合だけではなく，他の場面でも比例関係を前提として捉えることはもちろん，図や数直線に表し商の意味を解釈できたことが明らかになった.

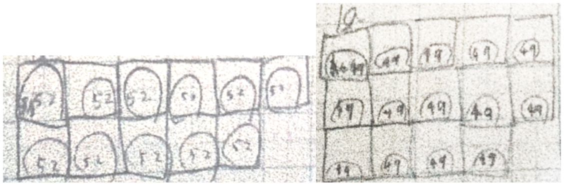

図 10（ss 児 1a あたり 52kg　1a あたり 49kg）

si 児（1 人あたりの面積の図）は 1 時間目の自力解決で家庭科準備室をはじめ色々な場所の混み具合を図で表した.（図 11）

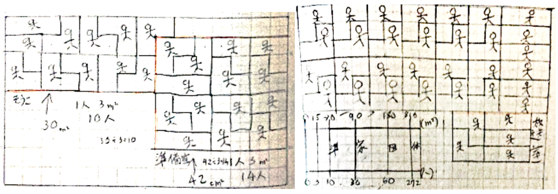

図 11（si 児 1 人あたりの面積の図）

そして，その図から数直線をかき，どの場所も「1 人 3 ㎡」であること（同じ混み具合）であることを記している.

1 人あたりの面積と 1 ㎡あたりの人数といった商の意味を解釈する時に図を用いることが有効であることが明らかになった. それと同時に図を数直線と関連させて捉えることが大切であることがわかった. その前提には問題場面を比例関係として捉えることが重要である.

単元が終わる頃には，ほとんどの児童が数直線と式を対応させて考えることができていた.

5.研究のまとめ

同じ混み具合をつくる活動を導入に取り入れることで，異なる割合を比べる時に，割合の本質である，倍の考えで比べることや比例の考えを前提として問題を解決することができた.

実践を通して混み具合の人数と面積の 2 量の関係を，比例関係として捉えられていない児童の実態も明らかになった. これまでの量の大小比較で用いた差の考えで問題を解決するのである. そして差の考えではなく比例関係として見るためには，差の考えと倍の考えを見比べることが有効である. また，混み具合においては，日常場面を扱うことで，人数と面積の関係を想起しやすくなった.

比例関係を認めたことで，正しく図や数直線に表すことができた. 2 量の割合を比べる場面では，「1 人あたりの面積・1 ㎡あたりの人数」の商の意味や「面積÷人数」「人数÷面積」といった商の意味や式の意味を図や数直線から解釈することができた. そして，1 あたりの大きさに着目し混み具合を比べることができた. 同じ混み具合を数直線上に表し，倍比例や等分比例を様々な場所の人数と面積を比べるときに用いることで，「1 あたりの大きさ」に着目しやすくなった.

今後は，「同じ割合をつくる活動」で養えた「比例の見方」が，次の割合の学習にどのように関わっていくのか検証していきたい.

引用・参考文献

青山尚司(2013).割合の見方･考え方を育てる指導の工夫:数直線図上で対応する数量を操作する活動を通して. 日本数学教育学会学会誌，95（10），2-10.

早川健（2003）.「同じ割合」に焦点を当てた割合指導の導入.日本数学教育学会学会誌，85（12），17-30.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（令和３年５月）.令和３年度全国学力・学習状況調査解説資料　小学校算数.

文部科学省（令和３年８月）.国立教育政策研究所.令和３年度全国学力・学習状況調査報告書　小学校算数.

中島健三（2015）.算数・数学教育と数学的な考え方：その進展のための考察（復刻版）.東洋館出版社.（原著出版 1982 年）

田端輝彦（2003）.同種の量の割合の導入に関する一考察.日本数学教育学会学会誌，85(12)，3-13.