

数学的な表現を育てる授業づくり

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 佐藤亮太

1. 本研究の目的

筆者の中学時代、数学の問題を考えたり、答えを導き出したりすることが面白く、数学が好きだった。しかし、自分の考えを文章に表したり、他人に説明したりすることに苦手意識をもっていた。

令和4年度全国学力・学習状況調査において正答率の低かった問題は、大問7「日常的な事象の数学化と問題解決の方法」の「(2) 関数、問題解決の方法を数学的に説明する」で28.2%だった。このように、正答率が低かった問題の共通点として、数学的な表現を用いて説明することに課題がある。現在の中学生においても、説明する力が苦手であることが分かる。

本研究の目的は、1次関数に焦点をあてて、データの傾向を的確に捉え、判断の理由や根拠を数学的な表現を用いて説明することができる授業実践を通して、有効性を検証することである。

2. 研究の内容

(1) 1次関数について

生徒は、第1学年で具体的な事象における二つの数量の変化や対応を調べ、関数関係について理解し、比例、反比例を関数として捉え直した。また、日常の事象の問題を解決するために、二つの数量の関係を表やグラフで表し、比例や反比例とみなして、考察している。

第2学年の1次関数では、二つの数量 x 、 y の変化や対応を調べる事を通して、1次関数について考察し、表現することができるようにする。平成29年告示中学校学習指導要領解説数学編には、「1次関数の特徴を表、式、グラフで捉えるとともに、それらを相互に関連付けることで、1次関数についての理解を深める。」「問題を解

決する際には、目的に応じて表、式、グラフを適切に選択し的確に表現することが大切である。」と位置付けられ、表、式、グラフを意識した指導が重要視されている。

(2) 数学的な表現

数学的な表現は、表や式、グラフだけではない。中原(1999)は算数・数学におけるさまざまな表現方法をその特性に着目し、次の5つに類型化した。

- ・現実的表現…実世界の状況、実物、具体物などによる表現
- ・操作的表現…学習具などに動的操作を施すことによる表現
- ・図的表現…絵、図、グラフなどによる表現
- ・言語的表現…日本語、英語など日常言語を用いた表現
- ・記号的表現…数字、記号など数学的記号を用いた表現

このように、数学的な表現とは表、式、グラフだけでなく、言葉や操作なども含まれるものだと述べている。筆者は、1次関数の利用における数学的な表現には、次のものがあると考え

- ・図的表現…表、グラフ
- ・言語的表現…1次関数、直線、一定、みなす、変化の割合
- ・記号的表現…式 ($y = ax + b$)

また、裕元(2009)は、「数学的な表現する力は、単に、図、表、式、グラフ等の表現様式を学ぶだけで身につくものではない。それらを探求の道具として活用することができ、さらに、数学的な表現を使って自分の考えを相手に伝えようとしたり、数学的な表現で表された事柄を読み取るときに、実感を伴って自分のものになる。」というように述べており、数学的な表現を

手段の一つとした活動を取り入れた授業が大切であると考え。

(3) 授業実践の特徴

① 課題の提示

本実践の1時間目は、「気温が30℃以下の時、保冷バッグに入れたペットボトル飲料を10℃以下に保てる時間を予想しよう」である。この課題を提示する際、実際に保冷バッグに入れたペットボトルを見せ、触らせ、冷たいという実感を得る。また、人間が冷たいと感じる温度が10℃であることを教える。これにより生徒が興味を持ち、自分の部活動の経験などと照らし合わせながら、意欲的に問題に取り組むことができる。

2時間目は、「2022年7月24日の富士山の八合目周辺の気温が何度くらいかを予想しよう」である。本時では、山梨県内の6つの観測所の標高と気温をタブレットで調べさせ、問題解決をしていく。その調べる日時として、2022年7月24日12時に設定した。これは、この課題を提示する際、2009年7月24日に凍死で男性が亡くなった事件を取り上げるため、つながりを持たせた。これにより、富士登山をしたことがある生徒や、これから富士登山をしたい生徒の身近な出来事であり、生徒が自分事として問題に取り組むことができる。

② グループワーク

本時では、数学的な表現を用いて説明する力を養うためにグループワークを取り入れた。グループ編成については、実習担当と相談をし、グループごとに学力差が開きすぎず、話し合いが活発になるように編成した。グループワーク前に、「根拠：考えの元になる資料や証拠」、「理由：自分の考え、推論」を説明し、根拠と理由を明確にして生徒が説明できるようにする。

③ データについて

本実践では、限られたデータから問題を解決していく。現在の社会で必要となる力は、情報を自分で収集し、整理し、分析し、考察する力である。そのため、生徒に一方向的に教師がデータを提示せず、解決するためにはどんな情報が必要であるか考えさせる時間を設ける。2時間

目では、グループでデータを調べさせる活動を取り入れた。本時で必要なデータは、単に2022年7月24日12時の観測所の標高や気温を調べても、信頼度の高いデータは得られない。生徒が気象に関する信用できるデータはどこを調べたらいいのかを考え、気象庁のサイトにたどり着けるようにしたい。

④ 1次関数とみなす

前時までには、1次関数について一通り学習をしてきた。本時の授業では、現実事象の問題を表に表されたデータから変化の割合に着目したり、グラフに表したりして1次関数とみなして解決をしていく。1次関数とみなすためには、データの特徴と1次関数の特徴が類似していることに気づかなければならない。そのため、復習において、1次関数は変化の割合が一定になり、グラフが直線になるということを板書しておき、授業を通して1次関数の特徴を確認できるようにする。自力解決で手が止まっている生徒がいれば、板書とグラフを見比べるようにする。

3. 授業の実践

(1) 授業について

令和4年10月6日、11月16日に、山梨県内の公立小学校において、研究授業を2時間行った。対象は第2学年で、1時間目は22人、2時間目は16人である。

生徒は、すでに1次関数を学習し、それを利用した授業を行う。

(2) 1時間目の授業

① ねらい

冷たいペットボトル飲料が10℃になる時間を、1次関数を利用して問題を解決し、説明することができる。

② 授業の実際

ア.1次関数の復習

最初に次のことについて、生徒に発問しながら復習を行った。1次関数の式は $y = ax + b$ 、変化の割合 a が $\frac{(y \text{の増加量})}{(x \text{の増加量})}$ と求められ一定、

1次関数のグラフは直線で切片を通る。

イ.問題把握

保冷バッグの中からペットボトルを取り出し、冷たいことを確認する。そして次のように問うた。

「冷蔵庫からペットボトルを取り出して、保冷バッグに入れて持ってきました。じゃあ、どれぐらいの間、その10℃以下に保てると思いますか。」

生徒の予想は、1時間、2時間、2時間半、6時間など、様々であった。

ウ.データの提示

問題を提示後、次のように問うた。

「予想するためにはどんな情報が必要ですか。」周りと話し合わせ発表させた。生徒から、「1℃上がるのに何分必要か」、「保冷バッグに入れた時間」、「ペットボトルの最初の温度」という意見があった。その後、データを提示した。

表1 問題のデータ

時間(分)	20	30	40	50	60
温度(℃)	5.2	5.8	6.5	7.0	7.6

エ.見通しを持たせる

データを提示した後、次のように問うた。

T30: このデータ、どういう表され方をしますか。

S29: 10分毎に上がる温度

T31: そうですね。じゃあ、今度はこのデータをもっとわかりやすくする方法はありますか。

S30: グラフ

T32: おお、グラフ。このデータをグラフに表してみたら、何かわかりそうですね。

オ.自力解決

ワークシートを配布し、今から求めるものが、水が10℃以下に保てる時間、10℃になる時間であることを確認し、8分間自力解決を行った。

カ.グループワーク

自力解決後、担任の先生と事前に決めていたグループに移動させた。その後、次のように黒板に提示し、根拠と理由について説明した。そ

の際、次のようにグループで説明するときの例文を提示した。

根拠: 考えの元になる資料や証拠
理由: 自分の考え、推論

「私は、この表から、こんな風なことが読み取れました。そこから、こうこうこういう風に考えられたので、結果、10℃以下に保てる時間は何分になりました。」

自力解決が途中の生徒には、どこまでやったか、何が分からなかったかを話し合うようにした。8分間グループワークを行った。

キ.全体検討

グループワーク中に2名の生徒の考えをタブレットで撮影し、Jam boardに貼り付けた。モニターに教師のタブレットを映し、見づらい生徒は自分のタブレットから見た。

1人目の生徒S(I.A)の考えは下の写真で、次のように発表していた。

時間(分)	20	30	40	50	60	70	80	90	100
温度(℃)	5.2	5.8	6.5	7.0	7.6	8.2	8.8	9.4	10.0

図1 生徒S(I.A)の考え

S(I.A): 私は、10分毎、10分で上がる温度の平均が0.6になるので、7.6に0.6を足していったら、10℃になるのが100分なので、100分だと思いました。

T39: ありがとう。まず、S(I.A)さんは10分毎に上がる温度に着目しました。この10分毎に上がる温度ってなんて言い換えられますか。

S34: 変化の割合、比例

T40: 変化の割合だね。なぜ、S(I.A)さんは変化の割合の平均をとったんですか。

S35: 大体同じ、一定

T41: そう、大体同じ、一定とみなしたから平均をとったんだね。この変化の割合が1つていということは、時間と温度はどんな関係ですか。

S36: 1次関数、比例

T42: そうですね。1次関数とみなして考えてますね。

この生徒は表から、10分毎の上がる温度を一定とみなし、平均0.6℃を求めた。60分と7.6℃にそれぞれ10分、0.6℃を足していくと、10℃の時間が100分であると答えた。

2人目の生徒S(W.Y)は、下のような写真で、次のように発表していた。

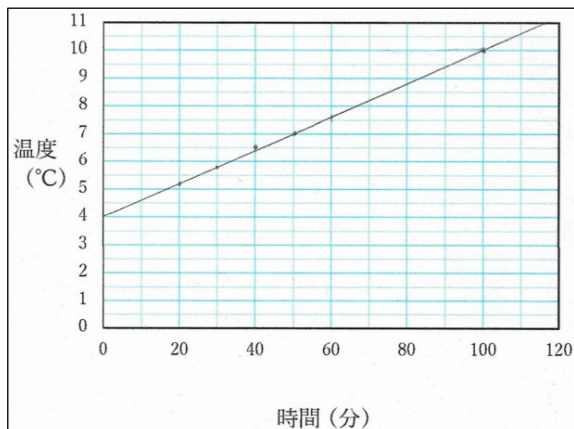


図2 生徒S(W.Y)の考え

S(W.Y)：私は、グラフに点を打って、直線を引きました。そこから、10℃のところを読んで、答えが100です。

T44：ありがとう。S(W.Y)さんはデータからグラフに点を打った後どうしましたか。

S39：直線を引いた。

T45：そうですね。なぜ、直線を引いたんですか。

S40：1列、まっすぐ並んでるから

T46：そうだね。点を打ったらまっすぐ並んでるから直線を引いたんだね。どういうことは、このグラフから、どんなことがわかりますか。

S41：1次関数

T47：そうだね。1次関数とみなすことができるから直線を引いたんだね。そして、10℃のところをみると100分だから答えが100分になりました。

ク.まとめ

学習感想をかかせた。その後、次のようにまとめた。

「温度は時間の1次関数とみなして考えることで予想できた。」

③ 生徒の考え

生徒の考えは以下の表のようになった。

表2 1時間目の生徒の考え

グラフに直線を引く	17人
グラフに点のみ	2人
グラフが直線以外	2人
表を用いた	8人
式をかいた	8人

表を使った生徒は、全員グラフでも考えていた。直線以外になった生徒が2人で、1人は点と点を結び折れ線になっていた。もう1人の生徒S(H.K)は、下の写真のように点と点を結び、20分の点と原点を結んでいた。

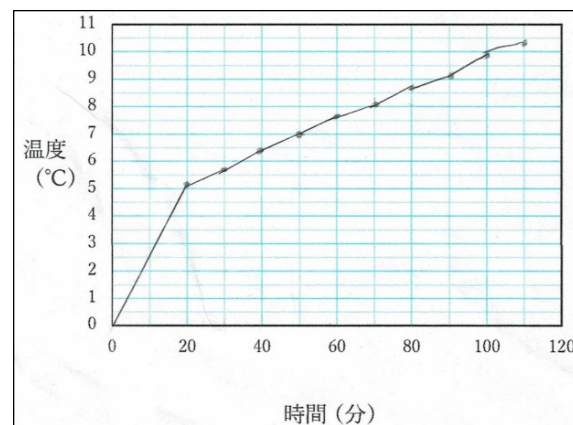


図3 生徒S(H.K)の考え

また、式を記入している生徒の内、1人が $y = 0.06x + 4$ と求め、7人は $y = 0.6x + 4$ と求めている。

(3) 2時間目の授業

① ねらい

問題解決に必要なデータを収集し、標高と気温の関係を1次関数とみなして考え、問題を解決する方法を説明できる。

② 授業の実際

ア.前時の復習

前時で、水の温度と時間が、表の変化の割合が一定であることや、グラフが直線になることから1次関数とみなして考えたことを振り返った。

イ.問題把握

2009年7月24日の富士山で行方不明にな

った男性が遺体で発見された事件を話し、亡くなった原因について話し合わせ、問題を提示した。

T11:凍え死に、凍死って出てきたんだけど、夏だよ。

S10:高いから寒い

T12:寒いんだ。てことは、気温って何に関係してそうですか。

S11:高さ、標高

T13:それでは今日はこんな問題を考えていきましょう。

問題:「2022年7月24日の富士山の八合目周辺の気温が何度くらいかを予想しよう。」

ウ.データ調べ、自力解決

問題を提示後、次のように問うた。

「予想するためにどんな情報が必要ですか。」すると、「高さ気温の比例のグラフ」、「一合目に合目の気温」、「百葉箱で調べた八合目の気温」、「その場所の去年の気温」、「七合目と九合目の気温」という意見が出た。その後、ワークシートを配布し、グループで6か所の観測所の標高と気温のデータを収集させた。データが調べ終えたグループから自力解決するよう指示した。生徒のデータ調べが捗っていなかったため、生徒に手を止めさせ、教師がモニターで気象庁のサイトのデータの集め方を説明した。

エ.全体共有

生徒の考えをタブレットで撮影し、Jam boardに張り付けた。モニターに教師のタブレットを映し、見づらい生徒は自分のタブレットから見た。発表する前に、根拠と理由を意識するよう促した。取り上げた生徒S(S.R)の考えは下の写真で、次のように発表した。

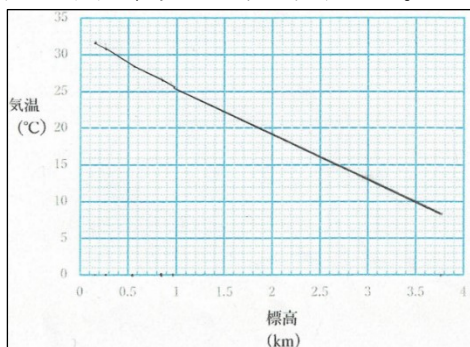


図4 生徒S(S.R)の考え

S(S.R):観測所の標高と気温を全部グラフに表して、八合目の標高が3.1kmだから、3.1kmのグラフを見て、12.5°Cだったので12.5°Cです。

T40:ありがとう。S(S.R)さんは、グラフに線を引いてたんだけど、なんで線引けたと思いますか。

S33:点を打ったから。

T41:点を打って、その点がどう並んでるから引けたのかな。

S34:比例、同じように並ぶ

T42:そうだね。グラフを見た時、点が大体まっすぐに並んでるから、直線を引いて、標高3.1kmのところを読むと、僕のグラフだと13°Cになりました。このグラフみたいに直線を引いたってことは何とみなしてますか。

S35:1次関数

T43:そうですね。1次関数とみなすことで八合目の気温を予想することができました。

オ.まとめ

現実事象に立ち戻りながら、次のように発問してまとめをした。

T45:今日は何と何の関係について考えましたか。

S36:標高と気温

T46:標高と気温はどんな関係でしたか。

S37:1次関数

T47:そうですね。1次関数とみなして考えることができました。

「気温は標高の1次関数であるとみなして考え、予想できた。」

T48:甲府は何度でしたか。

S38:32.2°C

T49:八合目は何度ですか

S39:13°C

T50:てことは20°Cくらいの気温差があるね。もしみんなが富士山に登ろうと思ったら、目標の標高と甲府の気温を調べれば予想できそうですね。

学習感想を書かせ終了した。

③ 生徒の考え

生徒の考えは以下ようになった。

表3 2時間目の生徒の考え

グラフに直線を引く	7人
グラフに点のみ	2人
グラフの点を結ぶ	10人

4. 分析と考察

(1) 1時間目

① 復習について

授業の始めに1次関数の表、式、グラフについて復習をした。その際、表は変化の割合が一定、グラフは直線になるという1次関数の特徴に焦点を当てて板書した。そのため、問題解決で、表から水の10分毎の上昇温度を一定とみたり、グラフに打った点の並びから直線を引いたりする生徒が多かった。

② 課題の提示

1時間目は保冷バッグに入れた水の温度が10℃に達する時間を求める問題であった。生徒が夏の部活動で体験したことのある問題であり、実際に保冷バッグに入れたペットボトルを提示し触らせたことで、生徒は意欲的に問題を考えていた。しかし、問題を解決してから現実の事象に戻り、「どうしたらもっと長く10℃以下に保てるか」や「冬に暖かい飲み物の場合」などについて考えることで、より生徒が今回の学習を身近に感じさせるようにする必要があった。

③ データの傾向を捉え1次関数とみなす

1時間目では、グラフに直線を引いた生徒が22人中17人だった。机間巡視や発表の際に、「1次関数」という言葉を用いている生徒は見られなかった。1次関数とみなしたから直線を引いたのではなく、無意識に直線を引いていると考えられる。そのため、全体検討では、1次関数とみなして問題を解決したことに気づかせるよう意識して行った。

④ 数学的な表現を用いて説明する

本時で考えられる数学的な表現は、次のものがある。

・図的表現……表、グラフ

・言語的表現…1次関数、直線、一定、みなす、変化の割合

・記号的表現…式 ($y = ax + b$)、平均値等

S (I.A) は、表を用いて「私は、10分毎、10分で上がる温度の平均が0.6になるので、7.6に0.6を足していったら、10℃になるのが100分なので、100分だと思いました。」と発表した。S (W.Y) は、「私は、グラフに点を打って、直線を引きました。そこから、10℃のところを読んで、答えが100です。」と発表した。

S (I.A) は、10分毎に上がる温度(変化の割合)という言葉的表現を用いて説明できていた。また、2人とも根拠(グラフや表などの図的表現)と理由を明確に説明していた。しかし、発表や机間巡視で「1次関数」や「みなす」という言葉を使って、なぜ直線を引いたのか、なぜ変化の割合の平均をとったのかという、より具体的な説明をしている生徒は見られなかった。全体検討で、なぜ直線を引いたり、平均をとったりしたのかを聞いていくと、生徒は1次関数とみなして考えていることに気づいた。このことから、生徒は、図的表現や記号的表現などの既習を用いて問題を解決することができる。しかし、それらを、言語的表現を用いて説明することが困難であると考えられる。また、本実践では説明をさせる際、自分の頭で説明を組み立てて行ったことにより、自分の根拠と理由が整理できなかつたことも要因の一つであると考えられる。そのため、ワークシートに、根拠と理由を書く欄を設けることで、生徒が整理をして説明しやすくなる。また、生徒の説明を、教師がみとることができ、より細かい分析が行えると考える。

(2) 2時間目

① 復習について

2時間目の復習では、1時間目の内容を口頭のみで復習したため、1時間目よりも1次関数とみなす生徒が少なくなった。そのため、授業のポイントとなる復習は板書に残す必要があった。

② 課題の提示

山梨の観測所の標高と気温から八合目（標高3.1km）の気温を求める問題であった。過去の凍死で男性が亡くなった事件を取り上げることで、生徒が自分事として問題に取り組むことができた。

③ データの傾向を捉え1次関数とみなす

グラフに直線を引けた生徒が19人中7人と、1時間目と比べて少なかった。多くの生徒のグラフが点のみや折れ線になっていた。原因として下のグラフより、2時間目は実際のデータを用いて行ったため1時間目よりもデータのバラつきが大きかった。

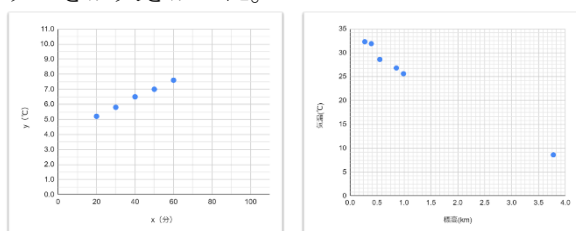


図5 用いたデータの比較

また、標高約1kmと約3.7kmと点が大きく離れていたことから、直線を引くことができなかったと考えられる。そのため、データを吟味し、バラつきができる限り少ない日時を指定する必要がある。

④ データ調べ

問題解決に必要なデータを一方的に教師から提示するのではなく、生徒がグループで協力しながら情報を収集して、問題を解決するために、データをタブレットで調べる活動を12分間行う予定だった。開始後、多くの生徒が「2022年7月24日12時」や「甲府 標高」と検索していた。そのため、残り8分に気象庁のサイトにあること、その3分後にテレビで調べ方を詳細に説明した。しかし、生徒は自分の作業に集中して、話を聞く態勢になっていなかった。また、グループで分担をせず、個人で調べて表を埋めていた。結果、データ調べと自力解決の時間が合計23分かかってしまった。今回のデータは、気象庁のサイトで何回か操作をしなければたどり着くことができない。そのため、調べ学習を0から生徒にさせるのではなく、全体でどんなサイ

トを調べることが良いか話し合い、調べ方を共有してから、活動を始める必要があった。

⑤ 数学的な表現を用いて説明する

本時で考えられる表現は1時間目と同じである。S (S.R) は、「観測所の標高と気温を全部グラフに表して、八合目の標高が3.1kmだから、3.1kmのグラフを見て、12.5℃だったので12.5℃です。」と発表した。この生徒は、グラフを用いて考え説明した。この生徒の発表から、1時間目と同様に、図的表現や記号的表現などの既習を用いて問題を解決することができるが、それらを言語的表現を用いて説明することが困難であると考えられる。

5. 成果と課題

(1) 成果

本研究の成果を以下に示す。

- ① 復習で1次関数の特徴を確認することで、1次関数とみなすことができた。
- ② 根拠と理由を明確にして説明する活動を通して生徒の理解が深まった。

①について、本実践では、授業の始めに1次関数の特徴（グラフが直線、変化の割合が一定など）を復習しながら板書にまとめた。それにより、生徒が問題のグラフの点の並びや表の変化の割合に着目し、1次関数の特徴と似ている事を感じ取り、グラフに直線を引いたり、変化の割合の平均をとったりして考えていた。それにより、下記の学習感想から、生徒は1次関数とみなして考えたことを読み取れる。

- ・表やデータを活用して、増加量などがある程度決め、一次関数とみなすことで、式を出したり、グラフを引けたりした。
- ・時間と温度は1次関数の関係である。表だけでなく、グラフでもいろいろなことが読み取れる。

②について、本実践では、グループワークや発表前に、根拠と理由を解説し、これらを明確にししながら説明するよう指導した。これにより生徒は、何をもとにして、どう考えたかなどを明確に説明していた。以下の学習感想から、説明し合うことで生徒の理解が深まっているこ

とが見取れた。

(1 時間目)

- ・小さい班で、自分の根拠や理由、わかんないところを教え合って、みんなに共有できた。
- ・最初わかんなかったことが、他の人の意見などを聞いて、理解したとき、こんなに簡単に分かりやすかった。自分と違う意見や考え方を知ることができて視野を広げることができた。

(2 時間目)

- ・結構難しかったけど友達の見意見をみて理解することができた。

(2) 課題

本研究の課題を以下に示す。

- ① データの吟味を行う。
- ② ワークシートの構成を工夫する必要がある。
- ③ 生徒が自力で行える活動を把握する。

①について、1時間目よりも2時間目の方が1次関数とみなせる生徒が少なかった。原因として、図4-1から、データのバラつきだと考えられる。そのため、1日の天気や季節なども考慮し、データのバラつきが少ない日時を提示する必要があった。

②について、本実践では、生徒が自力解決を行った後、すぐにグループになり、説明し合う活動を行った。そのため、生徒は自分の頭で説明を組み立てて行い、自分の根拠と理由を整理し、より具体的に言語的表現を用いて説明することができなかつたと考えられる。そのため、自力解決後、説明をするために根拠と理由を整理する時間をとり、自分の考えを客観的に見つめ直す必要がある。ワークシートに根拠と理由を書く欄を設け、それを見ながら説明、発表できるようにする。

③について、本実践の2時間目では、データをグループで調べる活動を行った。最初は何もヒントを与えず活動を始め、段階を重ねて調べ方を指導した。しかし、調べ方を指導している際、生徒は自分の作業に夢中になって教師の話

を聞くことができず、最終的には、計23分の時間がかかってしまった。短時間で生徒にデータを調べさせることは難しいことである。そのため、活動を始める前に、全体でどんなサイトを調べるのが良いか話し合い、調べ方を共有してから、活動を始める必要がある。生徒のICT活用能力にあった活動を考えていく。

6. 本研究の結論

本研究の目的は、「1次関数に焦点をあてて、データの傾向を的確に捉え、判断の理由や根拠を数学的な表現を用いて説明することができる授業を構想し施行し、有効性を検証する」ことであった。

筆者の授業実践を通して、1次関数とみなせたり、根拠と理由を明確にして説明しあうことで理解が深まったりした。しかし、データによって1次関数とみなすことができないことや、生徒が言語的表現を用いて説明できていない、生徒が自力で行える活動が把握できていないという課題が明らかになった。

今後の課題は、1次関数に限らず、生徒が言語的表現を用いて説明することができる力を育成する研究を進めることである。

参考・引用文献

- ・気象庁「過去の気象データ検索」,[気象庁 | 過去の気象データ検索 \(jma.go.jp\)](https://www.jma.go.jp/jma/overseas/data/jma/eng/eng_data_search.html), (参照日 2022年11月29日)
- ・中原忠男(1999)『構成的アプローチによる算数の新しい学習づくり』東洋館出版
- ・藤井齊亮、真島秀行(2021)『新しい数学 2』東京書籍
- ・柁元新一郎(2009)『中学校数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル』明治図書出版
- ・文部科学省(2018)『中学校学習指導要領(平成29年告示) 解説—数学編—』日本文教出版
- ・文部科学省『令和3年度 全国学力・学習状況調査 報告書【中学校/数学】』国立教育政策研究室