

# 中学校数学科の図形領域における指導についての研究

## －空間図形と平面図形を繋ぐ学習－

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 今泉健汰

### 1. 研究の動機と目的

数学において、空間図形の問題を解く際に、模型を用いて問題となっている空間図形を観察しながら解くということとはできない。また、実際には見取図や投影図といった平面図形で表現された空間図形を扱う必要があり、空間図形を自身の頭の中でイメージしながら問題を解くことが求められる。ここに空間図形の問題を解く上での課題があると考えられる。

全国学力・学習状況調査においても、生徒が空間図形の問題を解くことに課題を持っていることが明らかとなっている。

右の図は立方体の見取図です。線分  $BD$  と  $CF$  の長さについて、下のアからエまでの中から正しいものを1つ選びなさい。

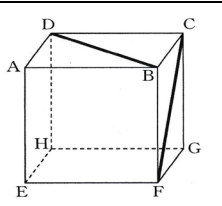


図1：H22 全国学力・学習状況調査【A 問題】

この問題はどちらの線分も正方形の対角線となっているため、線分の長さは等しい関係にあるが、実際の正答率は 55.7%と約半数しか正答しておらず、誤答では見取図上で表現された長さをそのままの長さとして捉えてしまった生徒が一定数いた。

また、中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説数学編において数学科の目標では「(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力、数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。」という文言がある。

数学において性質を見いだすことや統合的・発展的に考察する力を養うことが求められており、特に図形領域であれば図形に対す

る性質を見いだすことや空間図形と平面図形を統合的に捉えることが必要である。図形を多面的・多角的に捉える経験をすることで、図形に限らず事象を多面的・多角的に捉える力を育成できると考える。

従って、図形に関する学習指導において立体を様々な方向から観察して図形の性質を見いだすこと、平面で表現された立体について意図的に扱い空間図形と平面図形を繋ぐことが必要不可欠であると考えられる。

以上のことより、本研究の目的を、中学校数学科の図形領域の指導において、模型の活用や空間図形と平面図形を繋ぐ指導の追求を行い、生徒の図形の概念形成、特に空間図形の理解に対し、どのように寄与するかを明らかにするとともに図形領域の指導における効果を検証することとする。

### 2. 研究の方法

- ① 先行研究の分析と考察を行い、空間図形の理解に対する有効な教材や指導についての示唆を得る。
- ② 全国学力・学習状況調査、学習指導要領の分析と考察や先行研究から得られた教材、指導に対する示唆を受け、授業実践における教材や学習指導を設定する。
- ③ 設定した教材、学習指導をもとに授業実践を実施する。
- ④ 授業実践の分析と考察を行い、生徒の空間図形の理解に対し、寄与することができたのかについて授業実践の成果と課題より明らかにする。
- ⑤ 授業実践の分析と考察、成果と課題をもとに本研究の結論を纏める。

### 3. 空間図形の理解を促す指導の考察

生徒の空間図形の理解に対する有効な教材や指導への示唆を得るために先行研究にあたり、分析と考察を行った。

#### 3.1 空間図形と平面図形を繋ぐ教材の考察

ここでは吉川(2011)「投影図から立体を特定する課題の教材研究」を挙げる。この研究はあくまで教材研究に焦点が当てられた研究であり、取り上げた課題は以下の通りである。

【課題】投影図で表すと下の図のように、平面図、立面図が合同な直角二等辺三角形になる立体を特定せよ。ただし、立体は凸多面体であるとする。

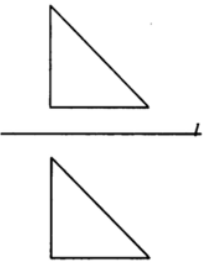


図2：課題の図

##### (1) 投影図の条件で立体を切断

この課題では平面図、立面図、両方の直角二等辺三角形について、それぞれの斜辺を対角線として正方形の枠を考えることで、立方体が浮かび上がる。立方体を考え、平面図、立面図の条件に沿うように切断することで立体を特定することができる。具体的には、平面図が直角二等辺三角形となるように切断することで底面が直角二等辺三角形の三角柱となり、切断した三角柱に対して、さらに立面図が直角二等辺三角形となるように切断することで図3のような正方形を底面とする四角錐となり、立体が特定できたことになる。

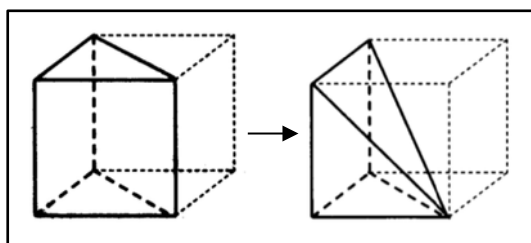


図3：立方体を切断する過程

平面図、立面図から立体を考え、立体に対して投影図を元にして切断するという活動を通して空間図形と平面図形を行き来した学習が可能となっている。

##### (2) 四角錐を切断

この課題において特定できる立体は四角錐だけではない。四角錐を構成する面のうち、正方形の面を対角線で切断することでできる三角錐についても平面図、立面図が共に直角二等辺三角形となっている。

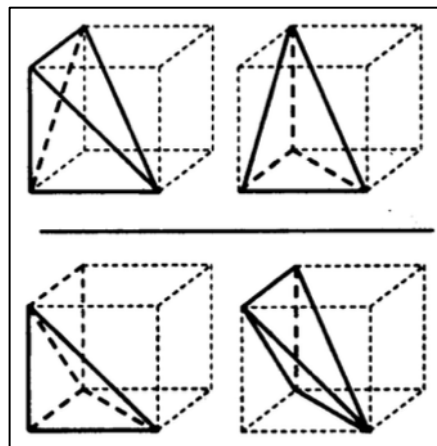


図4：切断により得られる三角錐

図4の上下で示された立体をそれぞれ合わせると切断する前の四角錐となる。つまり、上2つの三角錐と下2つの三角錐はそれぞれ切断面を共有している立体となっている。正方形の対角線は2本あり、2通りの切断方法があるため、四角錐の切断によって作成できる三角錐は計4種類となる。

##### (3) 側面図の考察

従来の投影図では5種類の立体を1つに特定することはできない。そこで平面図、立面図に加え、側面図を導入することで立体を1つに特定する。2つの視点では立体を特定することができないという結果から、生徒が3つ目の視点で観察する必然性を感じ得ることができ、立体を複数の視点で捉える活動に繋げることができる教材である。

#### 3.2 先行研究より得られた示唆

これまでの先行研究の分析と考察より得られた教材、指導に対する示唆を述べる。

- ・ 立方体の切断を扱う教材であること。
- ・ 立方体の切断により、新たな立体を考察する場面があること。
- ・ 空間図形に着目したり平面図形に着目し

たりすることが可能であること。

- ・ 平面図，立面図，側面図を用いて立体を投影的に捉える機会があること。

図形を多面的・多角的に捉える経験は，立体を様々な方向から観察することで達成されるものであり，平面図，立面図に加え，側面図の活用によって生徒が空間図形を観察する視点を意図的に増やすことが可能となる。従来の平面図，立面図では立体を特定できない場面を設定することが空間図形の理解に対して有効ではないかと考える。

#### 4. 授業実践の詳細

ここからは授業実践の詳細について述べていく。まず，授業実践で扱う教材についてであるが，吉川が挙げた「投影図から立体を特定する課題」を扱っていくこととした。

##### 4.1 授業実践の概要

授業実践における時期，対象，単元，授業計画については次の通りである。

時期：令和5年11月29日～12月13日

対象：甲府市内の中学校第2学年

単元：空間図形（投影図）

表1：授業計画

|     | 立体(立方体)を投影図で表現する                                                                                                     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 第1時 | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 投影図で表現し直すことで，立方体を色々な角度から観察する。</li> <li>・ 模型作りを通して，立方体に対する理解を深める。</li> </ul> |
|     | 投影図から立体を特定する①                                                                                                        |
| 第2時 | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 投影図から立体を考え，試行錯誤しながら模型を作成する。</li> <li>・ 四角錐の各面を構成する図形の特徴について理解する。</li> </ul> |
|     | 投影図から立体を特定する②                                                                                                        |
| 第3時 | <ul style="list-style-type: none"> <li>・ 投影図を満たす別の立体を考える。</li> <li>・ 側面図の学習を通して，様々な視点で立体を見ることが重要であると理解する。</li> </ul> |

##### 4.2 授業実践の実際

実際に行った授業実践について，投影図から立体を特定する活動を行った第2時，第3時を中心に詳細を述べていく。

###### (1) 第2時 12月11日（月）

###### ①前時の復習と課題提示

第2時の冒頭では第1時で立方体を作成し，様々な方向から投影図に表す活動を行ったことを確認した。その上で本時の授業では第1時と異なり，平面図形から空間図形を考える活動を行うことを伝え，課題を提示した。

【課題】投影図で表すと図のように，立面図，平面図が合同な直角二等辺三角形となる立体を特定しよう。ただし，立体はへこみのない立体であることとする。

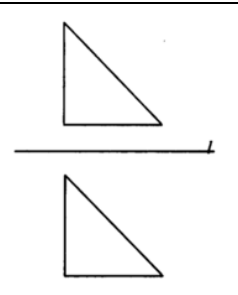


図5：第2時で扱った課題の図

課題を提示した後に，投影図で示された直角二等辺三角形から立体を特定する模型作成を行なっていくことを説明した。

###### ②課題の投影図について考察

いきなり個人解決に向かうことは難しいため，まずは課題の投影図からどのような立体を考えていけばよいか考察する時間を取った。具体的には平面図の直角二等辺三角形を取り上げて，平面図から考えられる立体にはどのような立体があるかを考察させた。話し合いを経て，生徒は平面図から底面が直角二等辺三角形となる三角柱や三角錐が考えられると解答した。そこで予め用意した三角柱の模型を提示し，平面図が直角二等辺三角形になっていること，立面図が正方形になっていることを見せ，立面図が直角二等辺三角形となるようにすれば良いことを確認し，課題に取り組む方針が立てられるようにした。

###### ③模型作成

模型作成は5分程度，個人解決の時間を取り，その後グループでの解決もして良いこととした。

立方体から考える生徒，投影図から考える

生徒と反応は様々であったが、第2時の模型作成においては図6に示した2種類の模型を作成することができた。

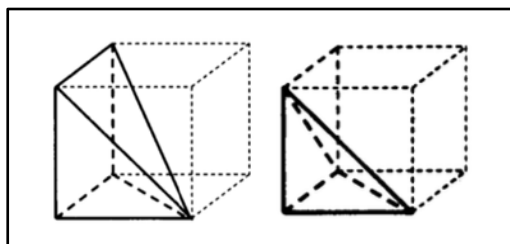


図6：第2時で作成できた立体

また、1つできたら、「他にも作れる場合は特定できると言えないため、別の立体が作れるか考えよう」と問いかけ、他の立体が特定できないか考えさせた。

四角錐と三角錐1種類が作成できたが、三角錐の方が作成できた生徒は多かった。これについては投影図の立面図、平面図である直角二等辺三角形を先に作成し、その2つの面を組み合わせ、残りの面を作成すると三角錐が出来上がるためであると考えられる。

四角錐については課題に入る前に確認したように、立方体から三角柱、三角柱から四角錐という流れで、立体を切断して作成することができていた。

#### ④模型について全体共有

模型作成の作業を終えた後は、全体で作成できた立体についての共有を行った。実物投影機で生徒が作成した立体を立面図と平面図の視点から映し、実際に課題の投影図を満たしている立体になっていることを確認した。

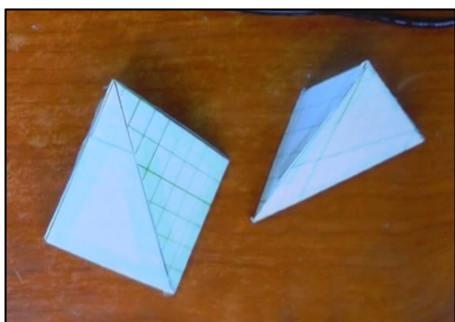


図7：実物投影機で映した立体

その上で、投影図から考える際に四角錐の作成が難しいため、四角錐の各面がどのようなになっているかを確認していった。

T45：具体的にこれどんな図形でできているかっていうと、これどんな図形。

S27：正方形。

T46：はい、正方形が何枚。

S28：1枚。

T47：これは。

S29：直角二等辺三角形。

T48：直角二等辺三角形、これが何枚。1，2。

ここはどうなってる。これどんな図形って言える。正面から見ると…。

S30：直角三角形。

T49：そう、これ実は直角二等辺三角形じゃなくて直角三角形ね。直角三角形がここともう1個ここにあるから2枚。四角錐なので5つの面でできてるからこれで全部だよ。

四角錐を構成する各面の形に着目するとともに展開図をかくことで、次回までに四角錐を作成できるようにした。

#### ⑤第2時のまとめ

四角錐と三角錐ができたことにより、投影図から立体を1つに特定することはできなかったことを全員の共通認識とした。

#### (2) 第3時 12月13日(水)

##### ①前時の復習と課題の再提示

第2時で投影図から立体を特定する活動を行ったこと、立体を1つに特定することができなかったことを復習し、課題を再度提示した。投影図から2種類の模型が作成できたが、2種類で特定したと言って良いか、他にも作成できる立体はないかということを問い、課題に取り組む準備をした。

##### ②四角錐と三角錐を比較

他の立体を考えるにあたって、既に作成できている四角錐と三角錐ではどこが異なっているのかを考察した。

まず、従来の投影図では表されていない部分の平面が正方形と直角二等辺三角形であり、横の面が異なっていることを確認した。さらに、他の立体を考える際に、正方形の面が直

角二等辺三角形でも良いことから、正方形の4つの頂点のうち、3つを選んで作る直角二等辺三角形が4種類あることを示して、他の立体の横の面が直角二等辺三角形となり、立体としては三角錐になりそうだということを全体で確認し、作業に入った。

### ③模型作成

第3時では模型作成に入る前の四角錐と三角錐の比較から、四角錐を用いて考える生徒が殆どであった。手が動かない生徒やわからない生徒には机間巡視の中で四角錐を元にして、その切断から考えていけば良いことを伝えた。特に正方形の頂点を1つ切り取り、対角線で切断しても投影図に影響がないことを、模型を用いて示しながら説明することで、模型作成に取り組むことができるようにした。

第3時では前時の2種類の立体の他に図8で示した立体を作成することができた。

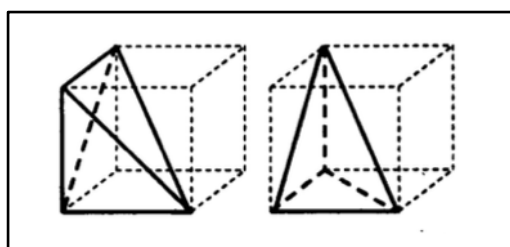


図8：第3時で作成できた立体

### ④特定できた立体について考察

模型作成の作業を終えた後は、作成できた立体についての確認を行った。作成できた生徒の立体を実物投影機で映しながら前で説明してもらった。

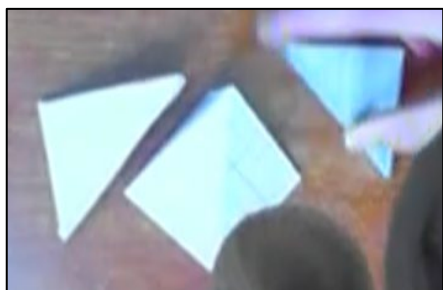


図9：実物投影機で説明

S21：三角柱の(長方形の)面だと思うんですけど、これ(長方形の面)をここの頂点とここの頂点を、えー、結ぶ線分(長方形の対角

線)で分けて、こんな感じに分けました。そうするとこっち側に四角錐ができて、こっち側に三角錐ができると思います。

S22：えー、こっち(三角錐)側に注目してほしいんですけど、こっち側の三角錐は今 A くんが持っているこの三角錐と組み合わせることで(四角錐と)同じ形になるんですよ。

このように第3時では別の立体ができることの他に、2種類の三角錐を組み合わせることで四角錐と同様の立体になることに気づくことができた生徒がいた。

第2時と第3時を通して、5種類の立体のうち、四角錐と三角錐3種類の計4種類の立体を模型作成の中で特定することができた。

### ⑤側面図の考察

4種類の立体が特定された上で、立体を1つに特定する方法を考えていく活動を行った。

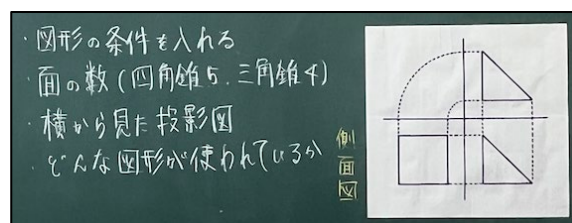


図10：側面図を考察した際の生徒の考え

立体を1つに特定する際の考えとして図10のような考えが挙がり、今回の授業実践においても「横から見た投影図」があれば良いという考えを持つことができていた。

また、ここで「側面図」を紹介し、四角錐を例に出して側面図まで含めた投影図を提示した。従来の立面図、平面図だけでは特定できない立体であっても、側面図まで含めれば1つに特定することができることを確認した。

### ⑥第3時のまとめ

2方向の視点では立体を特定することができなくても3方向の視点であれば特定することができること、立体を様々な方向から観察することでより正確に立体を理解し、捉えられるようになることをまとめとした。

### 4.3 授業実践の分析

ここでは授業実践の分析を述べる。主に模型作成の様子や立体を考察する様子について記す。

#### (1) 四角錐作成の過程

第2時において立方体からの切断ではない方法で四角錐を考察することができた生徒に、どのような考えで模型作成に至ったのかインタビューしたので、その内容を示す。

T: なんであの立体(四角錐)ができると思ったの?

S: なんか、あの立面図、平面図見て、大体あいう形(直角二等辺三角形)になるっていうことと、しかも三角形ってことを考えると(組み合わせる平面は)絶対斜めになる。

T: うんうん。

S: じゃあ(平面が斜めになるから)傾けるしかないかってなって…。

T: ここ(直角三角形になる面)をね。

S: はい。で、やった結果四角錐になりました。

T: 難しかった?

S: 結構難しい、なんかあれ(投影図)を立面図で見たときに、ここ(側面)の形なんでも良いんじゃないかって思って、逆に。なんでも良いって思って、じゃあもうこのまま正方形にしようって…。

T: ああー。ここが三角形の一边で、この長さが(等しい関係で)そのまま正方形になるからって感じ…。

S: はい。

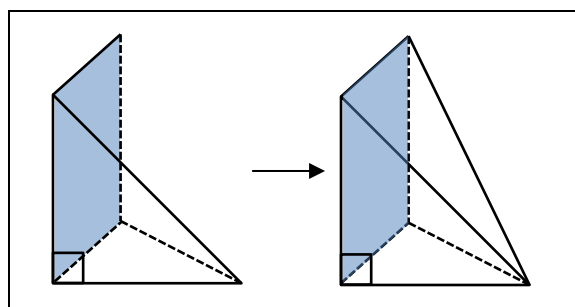


図 11: 四角錐作成のイメージ

インタビューした生徒は、投影図から立体を考える際に、立面図、平面図の直角二等辺

三角形を組み合わせたものを観察して、横の面が必ずしも直角二等辺三角形ではなくても良いのではないかという考えを持った。そこで、組み合わせている直角二等辺三角形の一边の長さが等しいため、横の面を正方形にしようという考えに至り、組み合わせた結果、四角錐の正方形と直角二等辺三角形を組み合わせたものが出来上がったという。

提示された課題には側面の指定はなく、正方形でも良いということに気づくことができしており、投影図から立体を特定する際の隠れた条件に着目して考えることができていた。また、模型を作成する過程で側面に正方形が浮かび上がったということがわかる。

#### (2) 三角錐作成の過程

第2時、第3時で行った模型作成の中で、三角錐を作成できた生徒の例を挙げる。この生徒は立面図、平面図の直角二等辺三角形を作り、側面にも直角二等辺三角形を組み合わせられることがわかったところで残りの空いている面を埋めれば良いことに気づいた。空間を埋める作業に関しては図12のように三角錐の枠を平面に押し当てて確認していた。

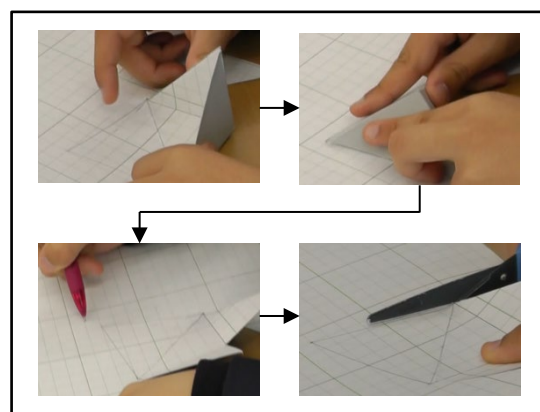


図 12: 三角錐作成の様子

元々は空いている面も直角二等辺三角形であると考えていたが、実際に作成することで正三角形であることを理解することができた。この活動により、空間内に存在する平面について、見取図や投影図で表された見かけの図形とは異なることに気づくことができた。

また、第3時を終えて生徒の中には図13のように四角錐の模型の中に正方形の対角線を

通る平面を入れ込み、それが切断面となって四角錐を2つの三角錐に分けることができるということを発見した生徒もいた。

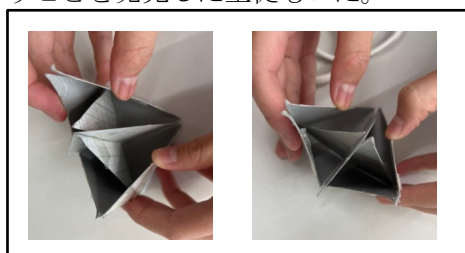


図 13：四角錐の中に切断面を入れ込む様子

切断面は2種類あり、どちらの切断面を使うかによって切り分けられる三角錐が異なっていることを理解することができていた。この模型から、四角錐を元にして三角錐を考察し、空間内に存在する切断面を正確に把握できていたことが明らかとなった。

### （3）生徒の側面図に対する考察過程

第3時の側面図を考える際の生徒の発表の様子を示す。

S38：横から見た投影図。

T47：横から見た投影図ね。なるほど。横から見たってどういうこと。

S39：こういうのだと…。

T48：ちょっと、じゃあ前、前に来ていいよ。説明してもらっていい。

S40：(立方体の面が)正方形だと、これが前から見た図で、これが横から見た図になるので絶対正方形だっていう、立方体だってことが証明されて、これが三角錐だと、これが上から見た図(平面図)で、これが前から見た図(立面図)で、これが横から見た図(側面図)という形になるので絶対に三角錐はこの形だと証明される。

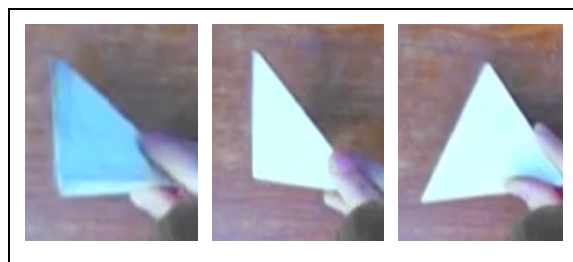


図 14：模型で投影図を考察

模型を用いて、従来の平面図、立面図に加えて、別の真横から見た図を取り入れれば良いのではないかということに気づくことができていた。別視点の考察が入ることで授業実践のねらいでもある「立体を様々な方向から観察する」ということを生徒自ら行い、立体を観察することができていたといえる。

## 5. 授業実践の考察

授業実践の実際や分析を受けて、授業実践を通して得られた成果と課題について述べる。

### 5.1 授業実践の成果

授業実践の成果を以下に示す。授業実践を通して得た成果は次の3点である。

- ・ 投影図から立体を特定する活動を行うことで、条件に含まれない平面を必然的に考察できた。
- ・ 側面図を取り入れた授業を行うことで、生徒が立体を様々な方向から観察することができた。
- ・ 模型作成を通して空間内に存在する平面を正確に捉え、見かけの図との違いを理解することができた。

中学校第1学年で学習する投影図は平面図、立面図のみであり、側面図までは表記されない。投影図に側面の指定がないため、生徒自ら側面の図形を考察する必要がある。側面が正方形か、直角二等辺三角形かを考察する活動を通して、空間図形を構成する各平面をより正確に捉える機会を設定することができた。

また、側面図を考察する必要がある課題にしたことによって生徒の立体を観察する視点を意図的に増やし、多面的・多角的に捉えることができた。授業実践の事前・事後に行なった、立面図、平面図がともに正方形となる投影図から考えられる立体を挙げる調査問題では、図15のように事前調査で投影図から考えられる立体が1種類であり、事後調査で2種類以上の立体を考えられるようになった生徒の割合は約71%であった。これは空間図形と平面図形を繋ぐ学習において、側面図を扱

った授業実践の効果であるといえる。

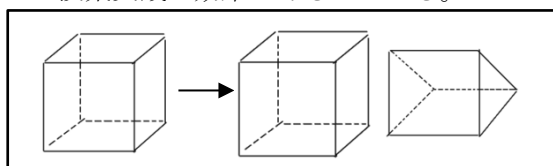


図 15：調査問題における解答の変容

さらに、見取図などの平面に表現された空間図形では、面の形や高さといった情報を正確に表現することができない場合がある。模型作成し、実物を観察したことによって見取図から捉える空間図形に対する誤った理解を修正することができた。

## 5.2 授業実践の課題

授業実践の課題を以下に示す。授業実践を通して得た課題は次の2点である。

- ・ 投影図を観察する際に模型による奥行きをそのまま捉えてしまい、正確な投影図の理解に困難を示した。
- ・ 実物投影機で模型を見たときに立面図、平面図が垂直の関係であることをきちんと示していなかった。

模型から投影図を捉える際に、模型(立体)を平面で考えなければならぬため、正確な投影図を模型から考えることは難しい場合があることが明らかとなった。

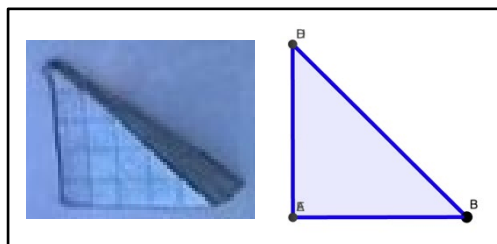


図 16：模型と ICT の比較

これに関しては、ICT の活用が効果的ではないかと考える。ICT であれば投影図を正確に映すことが可能であるため、模型との併用で ICT によって投影図を捉えることが、投影図の把握に必要ではないかと考える。

また、授業実践において投影図の確認をする際に、実物投影機を用いて生徒の作成した模型を映した。その際に、立面図、平面図については模型を動かして確認したが、立面図

と平面図の関係が垂直であることを生徒が意識できていなかったことが考えられる。これについては模型を動かさずに実物投影機そのものを動かして観察することで、生徒が立面図と平面図の関係を意識できると考える。

## 6. 研究の結論

本研究の目的は、中学校数学科の図形領域の指導において、模型の活用や空間図形と平面図形を繋ぐ指導の追求を行い、生徒の図形の概念形成、特に空間図形の理解に対し、どのように寄与するかを明らかにするとともに図形領域の指導における効果を検証することであった。投影図を用いた授業を実践し、側面図によって生徒の空間図形を観察する視点を意図的に増やすことによって、立体を構成する平面の理解を深めることができたといえる。しかし、投影図を模型の観察によって捉える際には、模型を投影的に捉える弱みを把握することが重要である。

従って本研究の結論を、「空間図形と平面図形を繋ぐ学習指導を行うことにより、生徒が図形を多面的・多角的に捉え、様々な方向から立体を考察し、正確に理解することが可能となることが明らかとなった。しかし、空間図形において投影図を扱う際には、実物を投影的に捉える際の弱みを把握し、理解を促す手立てを講じる必要がある。」と纏める。

## 引用・参考文献

- ・藤井斉亮, 真島秀行他(2020)『新しい数学1』東京書籍
- ・宮田舞(2011)「中学数学の幾何教育における数学の視覚化についての研究-3次元動的幾何ソフト Cabri 3D の活用-」第44回数学教育論文発表会論文集(第1巻) pp.531-536
- ・文部科学省(2018)『中学校学習指導要領(平成29年告示)解説-数学編-』日本文教出版 p.23 p.31 pp.45-46 pp.78-81
- ・吉川行雄(2011)「投影図から立体を特定する課題の教材研究」学芸大数学教育研究 第23号 pp.17-24