

一元一次方程式の立式について

—速さの問題について—

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 雨宮冬弥

1. 研究動機と背景

研究動機

本研究の動機として、筆者の大学時代の経験が関わっている。学部時代の実習で中学1年生に配属になり、授業実践での単元は1次方程式の利用を行った。そこで「文章問題では方程式を立てることはできるけど、方程式の意味は分からない。」や「方程式は解けるけど、文章問題から立式するのは苦手。」と生徒たちが言っていたのを聞いた。このことから私は方程式の立式は生徒にとって難しく、どのように生徒の困難を解決できるのかを考えたいと思い、本研究テーマを設定した。また、昨年度の研究では同じ方程式の分野で過不足の問題を中心に研究をした。そこで昨年度との比較として速さの概念がはいった方程式の文章問題ではどのような難しさが生徒にとってあるのか明らかにしたい思い、本研究は速さの問題に焦点を当てて行った。

研究背景

平成29年告示の学習指導要領（数学編）において「数学的見方・考え方を働かせ」という言葉がキーワードとなっている。「数学的な見方」とは、「事象を数量や図形およびそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」とされている。「数学的な考え方」とは、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識および技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」とされている。数学的見方を一次方程式の単元で考えると、問題を解決するために、等しい数量の関係を方程式に表すことや作った方程式を形式的に処理することで方程式の

よさを理解する力のことであるといえる。また、数学的考え方を同じく一次方程式の分野で考えると、数量の関係を図や表などでわかりやすくしたり、解決の過程を振り返り、他の問題場面で活用可能かどうかを考えたりすることといえる。また、内容の取り扱いの中に数量や数量の関係を文字を用いた式で表したり、その意味を読み取ったりすることの学習を結びつけていると書かれており、文字式の学習との関わりも見られる。

平成20年度の全国学力・学習状況調査の次の問題が挙げられる。

折り紙を何人かの生徒に配るのに、1人に3枚ずつ配ると20枚余ります。また、1人に5枚ずつ配ると2枚足りません。

生徒の人数を求めるために、生徒の人数を x として方程式を作りなさい。ただし、作った方程式を解く必要はありません。

この問題の正答率は60.5%であり、解答類型と反応率は表1の通りである。誤答類型の2、3、4の反応率はいずれも5%以下である。類型9の反応率が12.1%、類型0（無解答）の反応率が18.5%という結果になった。比率が大きい誤答類型は見受けられなかったため、子ども達が方程式のどこでつまづいているかを明らかにすることは難しいと思われる。

さらに、この問題に関して平成21年度の全国学力・学習状況調査において次の問題が出題されている。

次の問題と考え方を読んで下の
に当てはまる言葉を書きなさい。

問題

折り紙を何人かの生徒に配るのに、1人
に3枚ずつ配ると20枚余ります。また、1
人に5枚ずつ配ると2枚足りません。

生徒の人数を求めるために、生徒の人数
を x として方程式を作りなさい。

考え方

方程式を作るために、 x を使って、上の問
題の数量のうち $3x + 5$ を2通り

の式で表すと、 $3x + 5$ と $5x - 2$ になります。

この2つの式が等しいので、方程式は
 $3x + 5 = 5x - 2$ です。

この問題の解答類型と反応率は表2の通り
である。この問題では $3x + 5$ と $5x - 2$ の式が何
を表しているかという方程式の立式について
出題している。平成20年度の調査では約6割
の子どもが方程式の文章問題を方程式に立式
することができているが、平成21年度の調査
では正答率が4割未満となっており、文字式の
意味が読み取れていないということが分かる。

これらの調査により、子ども達は方程式を立
式する際に数量関係を読み取れずにいるとい
うことが分かる。このため、方程式分野にお
ける「数学的見方・考え方」は現代の数学教育
にとって1つの課題であるということがいえる。
また、平成29年告示の学習指導要領(数学編)
では「主体的に問題発見・解決の過程を遂行す
ること、そして、これを振り返って言語として
の数学で表現し、意見の交流や議論などを通し
て吟味を重ね、更に洗練させていくことが大切
であり、ここに数学的活動の教育的意義があ
る。」とあり、数学的活動を含んだ授業開発はこ
れから求められていると言える。

表1 平成20年度の解答類型と反応率

	解答類型	反応率 (%)	正答
1	$3x + 20 = 5x - 2$ または $\begin{cases} y = 3x + 20 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$ と解答しているもの (同値な式であればよい。枚数は y と異なる文字で表していてもよい。以下同様。)	60.5	◎
2	$3x - 20 = 5x + 2$ または $\begin{cases} y = 3x - 20 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ と解答しているもの	4.1	
3	$\frac{1}{3}x + 20 = \frac{1}{5}x + 2$ または $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 20 \\ y = \frac{1}{5}x - 2 \end{cases}$ と解答しているもの	0.2	
4	上記以外の一元一次方程式を解答しているもの	4.7	
9	上記以外の解答	12.1	
0	無解答	18.5	

表2 平成21年度の解答類型と反応率

	解答類型	反応率 (%)	正答
1	「折り紙の枚数」と解答しているもの (枚数と解答しているものを含む。)	36.3	◎
2	「折り紙」と解答しているもの	4.7	
3	「生徒の人数」と解答しているもの	19.3	

	(生徒、または人数と解答しているものを含む。)		
4	「配り方」と解答しているもの	2.3	
9	上記以外の解答	19.5	
0	無解答	17.3	

冒頭の研究動機でも述べたように昨年度の研究では過不足の問題について研究を行った。昨年度の研究では過不足の問題を1次方程式で解く際には数量関係を視覚化することが効果的であるということがわかった。今年度の研究は速さの問題を1次方程式で解く問題に焦点を当てており、数量関係の視覚化という面でのどのように関わっているのかを調べていくことは必要であると考え。また、速さの問題特有の難しさが子ども達にあるのかといったことを解明していく必要がある。

2 研究目的

以上の研究背景を踏まえた上で本研究の目的を大きく分けて2つに設定した。

1つ目は、1次方程式の速さの問題を解く過程において子ども達がどのようなところに難しさを感じているのかを解明することである。具体的には速さに関する側面、方程式の立式に関する側面の2つを中心に子どもがどのようなところにつまずいているのかを追求していく。

2つ目は明らかになった課題を解決するための指導法を追求することである。困難性の所在が分かれば、困難性を改善するための手立てが必要となる。その手立てを踏まえた数学的活動を考え、指導法として考えて行く。

3 研究内容

(1) 子どもはどこに難しさを感じているのか
本研究では「子どもが1次方程式の速さの問題を解く際にどのような難しさを感じているのか」について先行研究やアンケート調査を基に次の様に考えた。

(i) 速さという概念が子どもにとってわかりづらい

(ii) 方程式の立式が子どもにとって難しい
以上の二点について詳しく示していく。

(i) 速さという概念が子どもにとって分かりづらい

松原(2000)によると速さという学習内容が子どもにとって分かりづらいということについて「速さという概念が分かりづらい」「速さで使われる単位が分かりにくい」などと述べている。またこれらが起きている要因について子どもたちは時速や分速、秒速を日常生活ではほとんど使う場面がないことや単位がメートルと時間の2つあることで単位変換の難易度が上がっていることなどが挙げられると述べている。そこで、実習校1, 2年生を対象に速さに対する理解度の調査を行った。アンケートの内容は以下の通りである。

1、次のA君とB君の会話を読んで、後の問いに答えてください。

A「運動会での50m走などの徒競走で順位を決めるときには、ゴールに到達した順番で判断するよね。つまり、誰が速いかを決めるときには時間を計る必要はないってことだ。」

B「じゃあ、速さ比べをするときには、時間を測る必要はないってことか。」

①あなたはB君に賛成ですか。反対ですか。どちらかを選んでください。

ア、賛成 イ、反対

②①の理由を説明してください。

このアンケートについては速さを比べるときに数値化することが必要な場面と必要でない場面を区別し説明できるかという点に着目している。これよりどのような場面で速さを測る必要があるのかを理解しているかを調べた。回答結果は表3の通りである。

表3 アンケート1結果

①	1年	2年
賛成	17人	16人
反対	91人	86人
無答	1人	1人
合計	109人	103人

②	1年	2年
速さを比べるときに時間を測る必要があるかないかを、理由を明確にしながら説明できる。	52人	41人
速さを比べるときに時間を測る必要があるかないかを説明しているが、理由が不明確である。	24人	26人
その他（無回答を含む）	33人	36人
合計	109人	103人

※①の賛成・反対にかかわらず、理由が明確なものと明確でないものに分けた。

①の結果より多くの生徒が速さを比べるときに時間を測る必要があるかないかの判断を付けることができているということが分かった。しかし、その理由については約5割の生徒しか明確な理由を回答することはできなかったという結果になった。このことから速さに関する問題では速さを数値化する必要性について説明まですることができない生徒も多いことがわかる。日常的に用いられる数値化する必要がない場面と数学で用いられている速さを切り離すことができている生徒がいることである。このような点を踏まえて速さに関する指導を行っていくべきだと考える。

(ii) 方程式の立式が子どもにとって難しい

研究背景に示したように筆者の経験で立式の難しさは子ども達にとって課題点である。三輪(1991)は数学の文章問題を方程式を用いて解く過程を次の様に3段階で示した。

- 1.問題から方程式を作る。
- 2.作った方程式を解く。

3.方程式の解を吟味する。

これらの段階のうち、最も難しいとされる段階は1の問題から方程式を作る部分だと三輪は述べている。1の段階ではどのような思考過程が行われているのかを柿田(1990)では次の様に述べられている。「mayerの認知プロセスを基に方程式の文章問題における問題解決過程は次の様に示される。」

- 1.読み取り
- 2.読み替え
- 3.導出
- 4.統合

「読み取り」とは問題に含まれている言葉や事象の言語的な意味の理解をする能力のことである。例えば「距離」や「毎時4kmの速さ」の意味を理解することができる能力のことである。

「読み替え」とは読み取りによって読み取ったことがらを数学の問題に置き換え、値を割り当て、必要のないものは捨象し、文章題に含まれる数量間の関係を理解しようとするものである。また、読み替えは導出、統合への大まかな見通しを持つ段階である。速さの問題でいうと「距離の関係に目をつけると進んだ距離は等しいと言えそうだ」という立式に向けての見通しのことをいう。

「導出」とは読み替えの段階での見通しをもとに、次の統合への準備として、文章題に表されていない数量を未知数を用いて表すなど、問題の構成する要素を抽出する能力である。さらに、公式等、既習の知識を用いて、要素の間の関係構造を部分的に導き出す段階である。

「統合」とは読み取り、読み替え、導出の段階で部分的に見てきた数量の関係を総合的に捉え、問題に含まれる数量の相等関係をつかみ、等式として完成させる段階である。

柿田はこの4つの段階のうち「読み替え」が最も困難であると述べている。このことから、「読み替え」の力を身につける指導を今後行っていくべきだと考えた。

また、実習校1、2年生を対象に1次方程式の速さに関する問題に対する理解度の調査を

行った。アンケートの内容は以下の通りである。

、速さを求める公式は (速さ) = (道のり or 距離) ÷ (時間) です。では「道のり or 距離」を求める式と「時間」を求める式は何ですか？

このアンケートは速さを主格変換に関する調査であり、方程式を立式する場面では速さ、道のり、時間を文字式で表すために必要な知識であると捉え、その理解度を測る調査として行った。回答結果は表4の通りである。

表4 アンケート設問2結果

	1年	2年
正答	65人	64人
「道のり」=の式のみ正答	8人	9人
「時間」=の式のみ正答	16人	10人
誤答(無答を含む)	20人	20人
合計	109人	103人

回答結果から約6割の生徒が正しい式を導くことができていた。しかし、正答できていない生徒は4割おり、これらの生徒は方程式を立式する際に数量を文字式で表すことができず、立式に難しさを感じているのではないかと考えられる。これらの生徒については速さに関する数量を文字式で表せるような指導が必要であることが分かった。

以上のことをまとめると、子どもが1次方程式を利用する速さの問題における課題は3点挙げられる。1つ目は「速さ」の概念が子ども達にとって身近ではなく、日常の速さと数学の速さを切り離せていないこと。2つ目は「読み替え」の難しさがあるということ。3つ目は速さの数量を文字式で表すことが難しい生徒がいるということである。これらの点を踏まえて授業実践と研究授業を行った。

(2) 課題の解決に向けた指導

授業実践や研究授業の方向性としては(1)で述べた3点の課題をどのように授業の流れの中に組み込んでいくかを考えていく。

(i) 「速さ」の概念が子ども達にとって身近で

はなく、日常の速さと数学の速さを切り離せていないこと。

口分田、渡邊、二澤(2004)より速さに関する指導の問題点が挙げられている。速さの定義は(速さ) = (道のり) ÷ (時間) とされており、この式の意味を考えると速さは単位時間あたりに進む道のりということである。しかし、現在は「きはじ」などの組立量の概念を考えないですぐに公式を使うことができ、計算する方法の普及によって簡単に速さの計算をすることができ、速さの概念を理解しないまま進んでしまうことが考えられる。これらを踏まえながら、速さの実感性がともなうような授業づくりが必要であると考えた。速さの概念が日常的に身近でないことから速さを実際に考えたりすることのできる工夫が必要である。

(ii) 「読み替え」の難しさがある

「読み替え」の指導については問題を把握する力、数量関係を理解する力が必要である。このことから指導の方向性としては、方程式の利用の単元全体を通して速さの問題に限らず行っていく。問題把握の力については生徒全員が理解できてから次のステップに進むことや身近な経験に結びつけさせながら指導を行っていく。数量関係を理解する力については生徒たちが問題から数量を整理し、整理したものから実際にどのような関係性があるのかを考えさせる指導が必要である。そこで今回の授業実践では生徒が見いだした数量関係を板書やノートに残すことを考え言葉の式を活用していくことを実践していく。生徒の思考の過程を見える形で残すことで数量関係の理解を促すことができるのではないかと考えた。

(iii) 速さの数量を文字式で表すことが難しい

この課題については(ii)の取り組みに合わせて行っていくことを考えた。特に速さの問題を扱う授業では速さの定義を確認し、「速さ」「道のり」「時間」をそれぞれどのように導くことができるのかを確認し文字式で表す活動を踏まえながら指導としていきたいと考えている。

4 授業実践

I 実践の概要

授業実践においては主に課題(ii)の数量関係の把握を中心に行った。具体的な取り組みとして柿田(1990)の問題解決過程の認知プロセス(読み取り→読み替え→導出→統合)に沿った方程式の立式指導を行うことにした。特に最も困難と言われる「読み替え」の過程については問題把握、数量を表や図に整理することや言葉の式を活用することを行い、丁寧に指導を行った。

II 調査対象、方法

- i 対象：山梨県公立中学校1年3組
- ii 実施期間：令和3年9月下旬～10月上旬
- iii 実施単元：新編新しい数学 3章方程式2節方程式の利用(全7時)

III 授業の内容

授業実践の内容は課題(ii)の解決のための実際の指導である。報告する授業時間は第2時、第3時、第4時である。

・第2時

第2時は個数と代金の問題について授業を行った。問題は以下の通りである。

1個90円のオレンジと1個140円のりんごを合わせて15個買いました。そのときの代金の合計は1800円でした。オレンジとりんごは、それぞれ何個買いましたか。

「読み取り」段階においては日常的な話題にしやすい題材であったため生徒に問題場面をイメージさせながら授業を行った。

「読み替え」段階においては、はじめに問題場面にある数量を表を用いて整理を行った。また、表を作る段階において「導出」段階の活動も同時に行った。表の内容は以下の通りである。

	オレンジ	りんご	合計
1個の値段(円)	90円	140円	なし
個数(個)	x個	(15-x)個	15個
代金(円)	90x円	140(15-x)円	1800円

この表を作る作業を通して生徒に問題場面で

どのような数量の関係があるのかを考えさせた。また本時では表の中から等しい数量関係を見つけることは難しいと感じたため、具体的な数で考える活動を取り入れた。生徒に具体的な場面として「90円のオレンジを3個買い、140円のりんごを2個買ったときの代金を求めるときの式」を考えさせた。この場面の式は「 $90 \times 3 + 140 \times 2 = 550$ 」である。この式を「 $90 \times (\text{オレンジの個数}) + 140 \times (\text{りんごの個数}) = (\text{代金})$ 」という言葉の式に置き換え、もとの問題に戻すことで「 $90x + 140(15-x) = 1800$ 」という式を導き出す活動を行った。

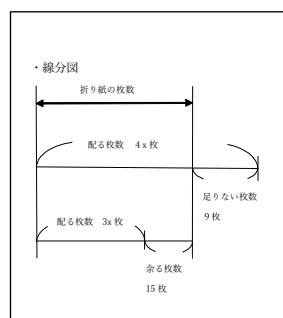
・第3時

第3時は過不足の問題について授業を行った。問題は以下の通りである。

折り紙を何人かの子どもに配ります。1人に4枚ずつ配ると9枚足りません。また、1人に4枚ずつ配ると15枚余ります。子どもの人数と折り紙の枚数を求めてみよう。

「読み取り」段階においては問題に場面が2つあることを確認した。今後方程式を立式するときに重要になるため押さえた。

「読み替え」段階では問題の数量関係を整理するために線分図を書いた。また、今回も線分図をつくる段階において「導出」の活動を同時に行った。授業で用いた線分図は次に示す。



この表を書いた後に生徒にどのような等しい数量関係があるか考えさせた。また、「読み取り」の段階で行った問題場面が2通りあることも合わせて考えさせた。立式する際には「(3枚ずつ配ったときの配る枚数) = (4枚ずつ配ったときに配る枚数)」という言葉の式を先に考えさせた上で「 $4x-9=3x+15$ 」の立式を行っ

た。

・第4時

第4時は速さの問題について授業を行った。問題は以下の通りである。

弟は家を出発して学校に向かいました。
その4分後に、兄は家を出発して弟を追いかけました。
弟は分速50m、兄は分速70mで歩くとすると、兄は家を出発してから何分後に弟に追いつきますか。

「読み取り」段階では速さの学習の振り返りを主に行った。分速の意味や速さの定義の確認を行った。

「読み替え」段階においては第2時で扱ったような表と問題場面を簡単な図で表したものをを用いて問題の数量の整理を行った。また、この時間でも表や図を示す段階で「導出」段階の活動も同時に行った。その後、等しい数量関係を考える活動に入ったが生徒たちの中で「追いつく」ということが「2者の進んだ距離が等しい」とことにつながらなかった。授業の中で図を示していたことからこれを有効に活用して「追いく」という言葉が問題の中でどのような意味を持っているのかを考えることが必要であった。「統合」段階の立式においてはこれまでの授業と同じように「(兄の歩いた距離) = (弟の歩いた距離)」という言葉の式を考えてから実際の方程式「 $50(x+4) = 70x$ 」の立式につなげた。

IV 授業実践のまとめ

以上の授業実践を通して、数量関係を考えて方程式を立式する過程の指導を行ってきた。授業実践中は生徒に授業感想を書かせていた。授業感想では「具体的な数で考えると分かりやすかった。」「図や表が分かりやすかった。」という感想が見受けられた。このことから方程式の立式において図や表を使って数量関係の把握を行うことや具体的な数で問題場面を考えたり言葉の式を考えたりすることが効果的であることがわかった。また課題点となったのは第4時に行った速さの問題において「追いつく」という言葉が表す数量関係が理解されていないな

かった。速さの問題特性をくみ取らないまま授業を行ってしまったことが生徒の理解につながらなかったといえる。授業全体を通して数量関係の理解や立式に時間をかけると問題演習の時間を確保することが難しくなってしまうこともわかった。このため授業内の活動を見直し時間短縮の工夫が必要であると感じた。

5 研究授業

I 研究授業の概要

研究授業の内容では、アンケートから「速さ」という者を実際に考える活動を含んだ授業をしようと考えた。また、授業実践から数量の関係を考える活動も含めようと考えた。これらの観点を踏まえた「問題づくり」の授業を行った。

II 調査対象、方法

- i 対象：山梨県公立中学校1年3組
- ii 実施日：令和3年10月
- iii 実施単元：新編新しい数学 3章方程式2節方程式の利用

III 授業の内容

授業の導入では以下のような原問題に取り組んだ。

姉は9時に家を出発して2000m先の駅に歩いて向かいました。姉の忘れ物に気付いた妹が、9時10分に家を出発して、自転車で姉を追いかけました。姉は分速60m、妹は分速210mです。妹が姉に追いつくのは9時何分ですか。

この原問題を解いた後に数字の部分をおこ書きにしたものをを用いて問題づくりを行った。内容は以下の通りである。

姉は(□)時に家を出発して(□)先の駅に(○)で向かいました。姉の忘れ物に気付いた妹が、(□)時(□)分に家を出発して、(○)で姉を追いかけました。
姉の速さは(□)、妹の速さは(□)です。妹が姉

上の問題において(□)の部分に数字を記入し(○)の部分には姉と妹の移動手段を記入する活動を行った。授業の後半ではつくった問題をペアで解き合った。解き合った後はつくった問題を答えに分数がでないようにするなど問

題を振り返って自分たちが問題を作り替える活動を行った。最後に問題づくりを行ったときに意識したことや困ったことを発表し、意見を共有した。

IV 研究授業のまとめ

以下、研究授業の成果と課題を示していく。まず教材についてだが移動方法を考える活動については速さを考えることにつながったと思われるが学習感想にはこれに関する記述はくねらいが達成されたとは言いがたい状況であった。次につくった問題を答えが整数になったり計算しやすいように新たに問題を作り替えることや方程式の答えが問題に適しているのかなどをさせたことは問題文の数量を考えたり問題理解につながったと考えられる。しかし、問題理解はされたが数量関係を正しく捉えることができたかどうかはまだ分かっていないためこれを見取る視点が必要であった。これらの視点をこれからの実践に生かすべきだと考える。

6 研究のまとめ

(1) 子どもはどこに難しさを感じているのか
これまで提示してきたアンケート、授業などの実践から速さの観点と数量関係の理解の観点の2つが考えられた。速さの観点では日常生活に速さの概念を使う場面が少なく、速さの概念が子どもの中で定着していないことが明らかとなった。今後は方程式の分野だけではなく様々な単元において速さの概念を定着させるような継続的な指導が必要である。数量関係の理解については速さの主格変換ができない生徒がいたり、問題を理解できていない生徒がいたり、等しい関係をみつけることが苦手な生徒がいたり様々であった。生徒の実態に合った指導が今後も必要になると考えられる。

(2) 課題の解決に向けた指導

これまでの授業実践と研究授業から3点成果と課題が挙げられる。1つ目は数量関係が表や図に整理することで生徒が分かりやすいと感じたということである。2つ目は方程式を立式する際に具体的な数字で問題場面を考え、言葉の式を立てる過程が子どもにとって分かり

やすいのではないかとということである。3つ目は速さの概念を定着させるためには継続的な指導が必要ということである。今回は1次方程式での実践であったがこの単元以外にも速さの地意識が必要な場面が多々あるためそこで逐一実践していくことが重要である。

引用・参考文献

- ・柿田真紀 方程式文章題の問題解決過程における生徒の理解特性の解析(1) 科教研報(1990)
- ・国立教育政策研究所(2008) 全国学力・学習状況調査 中学校報告書
- ・国立教育政策研究所(2009) 全国学力・学習状況調査 中学校報告書
- 文部科学省 中学校学習指導要領(平成29年告示) 解説 数学編 日本文教出版
- ・口分田政史、渡邊伸樹、二澤善紀 小学校における RTMaC 授業研究を生かした速さの教育に関する基礎研究 その2 「速さの公式の主格変換」に関する教育実践一 数学教育学会誌(2014)
- ・村松敏治 1次方程式の速さの文章題における困難の在りかについて 一大学生はどうとらえたか(2000)
- ・小田切歩、石橋優美 中学校数学科教科書の問題は理解のプロセスに沿って構成されているか 日本教育工学会論文誌(2018)
- ・清水宏幸(2017) 中学校数学における文字式の理解に関する研究 日本数学教育学会誌 題 99 巻
- ・清水宏幸(2019) 中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究 日本数学教育学会誌 第101巻 第7号
- ・清水宏幸(2019) 文字式とその式における文字の理解に関する研究 日本数学教育学会誌 101 巻 第11号
- ・植松敬太 生活場面における子どもの速さの認識に関する調査 教育デザイン研究第7号(2016)