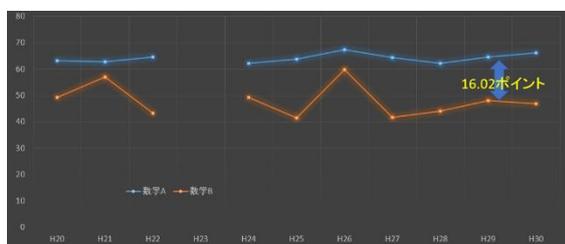


高校数学のよさを感じることでできる教材の開発

青柳広太郎 (M19EP021)

1. はじめに

IEA国際数学・理科動向調査(TIMSS調査)によると「算数・数学を楽しむ」「数学を勉強すると、日常生活に役立つ」と感じている児童生徒の割合は年々増加しているものの、国際平均値には未だ届いていない。また、全国学力・学習状況調査の中学校数学の結果を見ると、数学A(知識)に比べて、数学B(活用)の平均正答率は約16ポイント低い(図1)。



(図1 全国学力・学習状況調査 中学校数学 H20~30年度A, Bの平均正答率 著者作成)

この二つの調査結果は高等学校のものではない。しかし、小学校と中学校の調査結果を比較したときに中学校の方が数学を楽しんでいる生徒の割合が低いこと、平成14, 17年度高等学校教育課程実施状況調査結果、全国学力・学習状況調査を他教科(国語)の平均正答率と比較したとき数学のほうが知識と活用の差が大きいこと(数学:約16.0ポイント, 国語:約11.4ポイント)から高校数学は日常生活に役立っていると認識し難い状況にある、濱谷(2008)が述べているように、高校数学を有用と認識し難い状況にあると考えられる。

教職大学院の実習で行った質問紙調査(平成14年度, 17年度質問紙の項目をもとに作成)によると、実習校の実態として数学への興味・関心が高く、意欲的に授業に取り組んでいる生徒が多いと言える(詳細は後述)。しかし、記述解答結果から「数学を役立つ」と感じていない生徒は1学年114名中55名, 3学年110名中42名と半数近くに上り, 2学年では111名中66名と

半数を超える。また、学年毎の質問紙調査結果を比較すると、3項目すべてにおいて肯定的な回答が減少している。このことから、生徒が高校数学を有用と認識できていないことは実習校における課題の一つと言える。記述回答で1学年と2学年の間で差が見られたことから、中学校と高等学校の授業形態の違いが数学を有用と生徒が認識し難くしている要因の一つだと考えられる。

本研究では、高等学校学習指導要領(平成30年度告示)に記載されている「数学のよさ」のひとつの側面である数学の有用性に焦点をあて、数学が社会生活のなかで役立っていることを認識するような教材開発を目的とする。

2. 研究方法

(1) 実習校

- ① 実習校：山梨県内公立高等学校
- ② 実習期間：4月~12月

(2) 実施内容

- ① 質問紙による事前の実態把握
- ② 授業参与観察
- ③ 授業実践
- ④ 質問紙による事後の実態把握
- ⑤ インタビューによる事後調査(2名)

3. 授業実践に向けて

(1) 質問紙調査(事前)の結果と考察

質問紙による調査結果は次のようになった(1学年：114名, 2学年：111名, 3学年：110名, 計335名)。

1 数学の勉強は好きである(全学年)。

1	2	3	4
31.3%	36.4%	20.0%	12.2%

2 数学の勉強は大切だと思う(全学年)。

1	2	3	4
47.8%	42.4%	8.4%	1.5%

3 数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つ(全学年).

1	2	3	4
23.6%	46.3%	25.1%	5.1%

全学年調査結果から、各項目で 65%以上の生徒が肯定的な回答をしている。特に「数学の勉強は大切だと思う」の項目に関しては肯定的な回答が 90%を超えている。以上から、数学への興味・関心が高く、意欲的に数学の授業に取り組んでいる生徒が多いことが分かる。次に、検証授業を行う 1 学年の実態を確認する。

1 数学の勉強は好きである(1 学年).

1	2	3	4
43.9%	34.2%	14.0%	7.9%

2 数学の勉強は大切だと思う(1 学年).

1	2	3	4
61.4%	34.2%	4.4%	0%

3 数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つ(1 学年).

1	2	3	4
37.7%	47.4%	14.0%	0.9%

全学年調査結果と一学年調査結果を比べて、1 は 10.4 ポイント、2 は 5.4 ポイント、3 は 15.6 ポイントとすべての項目で、1 学年の方が肯定的な回答の割合が高いことが分かる。また、学年を上がるにつれて 1, 2, 3 の項目すべて減少していることが分かる。特に 3 では、肯定的な回答が 15 ポイントも減少していることから、数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つと高校生活を通じて感じられなくなっていることが示唆される。

記述回答をまとめると次のことが分かった。

1 「数学の授業をどのようなときにおもしろいと感じたのか」

- ・問題解決型の授業
- ・グループワークを取り入れた授業
- ・他分野とのつながりを実感できる授業
- ・公式や定理の本質的を理解できる授業
- ・複数解法が存在することを認識できる授業

2 「日常生活のなかで、どのようなときに数学を役立つと感じたのか」

- ・利子の計算(数列)
- ・ものづくり(図形と計量)
- ・年代測定法(微分方程式)
- ・ゲームのガチャの排出率(確率)
- ・金銭の計算(割引、消費税などの四則演算)

(表 1 質問紙調査結果「日常生活のなかで、数学が役立つと感じているのか」 著者作成)

役に立つ	はい	いいえ
一学年	59 名	55 名
二学年	45 名	66 名
三学年	68 名	42 名

1 の結果から、日常生活とのつながりを実感する問題解決型の授業やグループワークを好む生徒が多いことが分かる。特に、1 学年でこの 2 項目の記述が多くみられた。ここから、高等学校における数学の授業に日常生活の問題を取り上げる単元やグループワークがあまりみられないことが数学を有用と認識し難い要因の一つであることが示唆される。2 の結果から、数学を役立つと感じる場面は割合に関するもの、確率に関するものが大部分を占めていることが分かる。また、高校数学に関する記述は全体の約 3.9%であることから、実態として小学校及び中学校段階で獲得した知識が日常生活のなかで役立っていると実感できる場面はあるものの、高等学校で獲得した知識が日常生活のなかで役立っていると実感できる場面が少ないことが分かる。

(2) 授業参与観察の目的と結果

著者は小学校・中学校で授業を観察・実践し

た経験はあるものの、高等学校での授業を観察・実践した経験は無い。そこで、観察から学習指導要領(平成 30 年告示)に記されている「数学のよさ」を高等学校では、どのような手立てで認識させようとしているのか、黒板の使い方・生徒への発問及び解説の仕方に着目して週 2 回、習熟度の異なる 12 クラスで数学 I、数学 A、数学 II、数学 B、数学 III の授業観察を行った。その際「数学のよさ」を 1. 有用性、実用性(実際に役立つこと)、2. 簡潔性、明確性(記号、式を用いて簡潔に表すこと)、3. 一般性、効率性(抽象化に起因する適応範囲の広いこと)、4. 発展性、創造性(自由な思考により発展させられること)、5. 論理性、確実性(論理の厳密で結果が信頼できること)、6. 優美性、審美性(得られた手法や結果が美しいこと)、7. 充足性、優位性(難問等を解決できたときの満足感)、8. 娯楽性、ゲーム性(問題を解くこと自体が楽しいこと)(真田・大田, 1995)の 8 つとして授業観察を行った。また、生徒が教科によってどのような反応を示すのか全 7 回、他教科(物理・化学・英語)の授業観察を行った。

数学の授業観察から、1 学年・2 学年では 2, 3, 5 を、スーパーハイ(各学年の最も学力水準の高いクラス)で 7 を認識させる授業展開がなされていた。特に、2, 5 を認識させる授業展開が多かった。具体的には、変数がある領域内で変化するとグラフはどのようになるのか、ICT を活用して動かしながら説明を行っていた。また、動かす変数を変えると、グラフはどのようになるのかを考えさせて検証することで、生徒に一般化するよさや論理の正確さを認識させていた。3 学年では、使うことのできる知識が豊富であることから、4 を認識させる授業がなされていた。しかし、1, 8 を認識させる授業展開はほとんどなかった。日常事象のなかで、高等学校で学習する知識を活用したものがあまりみられないことから問題解決型の授業が少ないため、問題を解くこと自体に楽しさを感じられていないと考える。また、日常事象を活用した例が出ている単元も応用・発展課題として教科書に載っているため、時間の

都合で省略されてしまうことが多いと知った。他教科の授業観察から、化学、英語の授業で楽しそうに授業を受けている生徒が多かった。この 2 教科に共通していたことは、生徒の発言の機会が多かったことである。特に説明が長くなってしまう場合に、生徒が発言する場面を短い間隔で与えて、一緒に解答をつくりあげる展開となっていた。高等学校で行われる授業に対話を取り入れることの難しさやどのような板書をする生徒が理解できるのか、客観的に授業を観察するなかで知ることができた。また 1, 8 を認識させる授業展開にするためには、教科書に載っている応用・発展課題を扱うだけでなく、単元の内容と日常事象との関係を教材研究のなかで学び、授業に生かすことが必要であると確認することができた。

(3) 授業内容と学習体系の設定と目的

① 「数学のよさ」—「役立つ」とは

(1)(2)から、「数学のよさ」の一つである有用性を認識させる教材を開発するにあたって、「役立つ」という言葉を 3 つに分類した(表 2)。

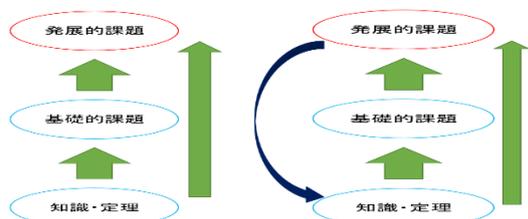
(表 2 「役立つ」の分類 著者作成)

1. 私生活(自分自身の生活)で役立っていることを認識する。
2. 目に見える部分(日常生活)で役立っていることを認識する。
3. 目に見えない部分(社会生活)で役立っていることを認識する。

学校段階によって児童生徒に認識させたい「役立つ」は異なるを考える。小学校では 1, 中学校では 2, 高等学校では 3 が最も認識させたい「役立つ」だと考える。また、二学年・三学年を対象に数学 I、数学 II、数学 A、数学 B の内容について調査したところ、数学 I A では「データの分析」「整数の性質」「場合の数と確率」に苦手意識を持っていることが明らかとなった。以上から、授業内容を「整数の性質」とし、社会生活のなかで役立っている「暗号」を題材に授業案を作成した。

② 「基礎から積み上げる学び」と「基礎に降りていく学び」(市川, 2001)

『基礎から積み上げる学び』とは、従来から行われてきた教育方法で、大学などに親学問と呼ばれるものがあり、それを目指して小・中・高等学校と積み上げていく学習過程のことである(川久保, 2013)。この学習体系だと、生徒にとって習った内容が役立っていると感じるまでに時間がかかることが数学を役立たないと思わせる要因になっているのではないかと考える。言い換えれば、生徒が日常生活、社会生活の何とつながりがあるのか分からないまま授業が進んでしまうことが「基礎から積み上げる学び」の課題である。その課題を解決するための学習体系が「基礎に降りていく学び」である。『基礎に降りていく学び』とは、学ぶということの実質的な意味付けや意義が分かるような学習を取り入れていく過程のことである(川久保, 2013)。この学習体系を取り入れることによって、何のために学んでいるのかを明確にすることができる。二つの学習体系を図に表すと次のようになると考えた。



(図2 「基礎から積み上げる学び」(右)と「基礎に降りていく学び」(左) 著者作成)

「基礎に降りていく学び」の考え方から、発展的課題を授業の導入で取り扱うこととする。これによって、有用性(本研究では社会生活のなかで、役立つこと)を認識すると同時に知識・定理の必要性を理解させることができる。

③ 「暗号」を取り入れた教材

「暗号」を取り入れた授業案を作成するにあたって、次に示す二人の授業実践・構成を主に参考とした。大澤(2001)は、中学校2年生(1クラス36名)を対象に1. 暗号を解説する, 2.

暗号を捉える, 3. 暗号を作成する, 4. RSA暗号を理解する(2時間)という全5回の構成で授業実践を行っている。この実践では、数学の記号の便利さを生徒に知ってもらうこと、整数の性質の不思議さを実感させることを目的としていたと予想されることから、「数学のよさ」の2, 7を認識させる授業構成だったと考える。また、暗号の原理を実感の伴った形で理解させることはできなかったと述べている。これは、数学的な内容が高度であったこと、合同式の定義や数学的な説明を行うことが難しい中学生を対象とした授業実践であったことが要因だと考える。これをもとに西村ら(2014)は、数学を専門としない一般の方(大学生1名, 50代~70代の社会人9名)を対象とした公開講座を行っている。大澤(2001)での課題を踏まえて、公開鍵暗号の本質が理解できるようなカリキュラムを考えたと述べている。内容は1-1. 暗号クイズ, 1-2. 暗号を作ろう, 1-3. 暗号の歴史I, 1-4. 暗号と数学, 2-1. 単文字換字暗号(復習), 2-2. 暗号の歴史II, 2-3. 公開鍵暗号, 2-4. RSA暗号という全2回, 各回3時間の構成である。この実践では、グループによる体験的活動を通して数学を楽しみながら学んでもらうこと、有用性を感じさせることを目的としていたことから、「数学のよさ」の1, 8を認識させる授業構成だったと考える。また、暗号を題材とした教材開発はうまくいったが、内容の難易度が参加者に合っていなかったことが課題として指摘されている。そこで、本研究では古典暗号系(シーザー暗号, アフィン暗号)の本質が理解できる教材を考えたい。「数学のよさ」は1であることから、西村ら(2014)の授業構成を基盤として授業計画をもとに作成した。

4. 授業実践

(1) 検証授業の概要

対象：1学年(4クラス)

日時：9月17日から10月17日まで

単元：整数の性質(導入部分, 90分×3回)

目標：合同式が社会生活のなかで役立ってい

ることを実感する。また、合同式の学習を通して、古典暗号系の仕組みを理解する。検証授業の内容は以下のとおりである(表 3)。

(表 3 単元計画 導入部分)

第 1 時 暗号クイズ(暗号解説), 暗号づくり(グループワーク), 暗号の歴史と利用場面
第 2 時 第 1 時に制作した他グループの暗号解説, 合同式の定義, 性質の学習
第 3 時 合同式の性質の証明, 暗号以外の用途(問題演習), シーザー暗号の解説, 数式が暗号のなかで用いられるようになった理由をアフィン暗号への発展から学ぶ

検証授業で「発展的課題」にあたるのが「古典暗号系」, 「基礎的課題」にあたるのが「合同式の暗号以外の用途(教科書問題)」, 「知識, 定理」にあたるのが「合同式の定義・性質・証明」である。また, 授業実践するにあたって, 3 つの仮説を立てた。

(表 4 検証授業における 3 つの仮説)

仮説 1. 暗号教材のなかにグループワークを導入することによって, 学習者に学習意欲が生まれる
仮説 2. 単元の冒頭に暗号を取り入れることで, 興味の持ちづらい発展分野である合同式について興味を持ち, 合同式がどのような仕組みとなっているのか主体的に考えようとする。
仮説 3. 「基礎に降りていく学び」を取り入れることで, 何のために学んでいるのかが明確化され, 数学の有用性について学習感想のなかに記述させることができる(インタビューのなかで, 聞き取ることができる)。

(2) 検証結果

検証結果 1. 学習感想のなかで, グループワークに関する肯定的な記述が多くみられた。また, 否定的な記述がみられなかったことから, グループワークを導入したことで学習者

に学習意欲が生まれたと考えられる(表 5)。

(表 5 仮説 1 に関する記述例)

<ul style="list-style-type: none"> ・暗号を考えたりつくったりするのがおもしろかった。 ・チームワークは一人よりもアイデアが広がるし楽しかった。

2 名の生徒を対象にインタビューを各 45 分間行ったもの(以下, インタビュー調査結果とする)から, 仮説 1 に関すると考えられるプロトコルを紹介する(表 6)。以上から, グループワークを導入することによって, 学習者に学習意欲が生まれていることが明らかとなった。

(表 6 仮説 1 に関するインタビュー調査結果)

T (77)	この授業を通して, 楽しかったところはあった?
S1 (77)	はい! 一番初めのグループ活動だとか, 合同式をほぼ理解できた状態、「あ, こういう仕組みなんだ」っていう状態で問題を解いたり暗号を解いたりしたときに解けた喜びというか, そういうものは結構ありました。そこが楽しかった気がします。
S2 (115)	S 先生は他の先生と比べて比較的グループワークをとってくれる先生だから, わからない問題があったらほかの生徒と話し合っただけという風になるのか考える時間が普段からあったから先生の授業でもいつものように取り組めたのかなと。
S2 (116)	楽しいですね, 話し合っただけ。

仮説 2 に影響したと考えられる実践内容と理由について記述する。1 時間目に合同式の学習を行わないだけでなく, 合同式という言葉が授業の最後まで出さずに行った。これにより, 暗号と数学とのつながりについても興味を持ち, 学習意欲が生まれるのではないかと

考えた。また、2時間目、3時間目に合同式の性質が四則演算すべてにおいて成立するのか考えさせる。これにより「合同式はどのような仕組みなのか」ということを生徒に考えさせることができると考えた。

検証結果2. 学習感想のなかで、授業の冒頭が暗号だったこと、暗号と数学とのつながりとは何であるかに関する記述が多くみられた。この結果から、合同式という言葉を出さなかったことによって、暗号と数学とのつながり、言い換えれば、授業内容に興味を持たせることができたと考える(表7)。しかし、仕組みについてあまりわからなかったという記述がみられた(表8)。この結果から、授業内容にあたる合同式について興味を持ち、どのような仕組みとなっているのか考えさせることはできたものの、暗号の仕組み(原理)と合同式の仕組み(本質)についての学習が足りなかったことが課題であると考ええる。

(表7 仮説2に関する肯定的な記述例)

- ・なんでいきなり暗号なんだろうと思ったのですが、まさか数学につながっていると思っていなかった。
- ・数が大きくなったり、累乗の数が増えたりすると、計算が大変になっていて、こんな数を計算するのにどんな位かかるんだろう…とったりして、暗号についてより興味がわきました。

(表8 仮説2に関する課題を示唆する記述例)

- ・「 $=$ 」との違いに迷いそうです。
- ・合同であるけれど、同じではないというのがつかみづらいです。

インタビュー調査結果から、仮説1に関すると考えられるプロトコルを紹介する(表9)。表9から、S1はインタビュー前半で暗号の仕組みについて理解できたと言っているが、インタビュー後半では、「 $=$ 」と「 \equiv 」との違いがよくわからなかったと言っている。前者は、二元一次方程式から解を導き、合同式に

当てはめることで対応するアルファベットを見つけることができること、言い換えれば暗号の仕組み(原理)を指していると考えられる。後者は、合同式の仕組み(本質)についての理解が不十分であることを示唆している。以上から、単元の冒頭に暗号を取り入れることによって、合同式に興味を持たせることができると言える。また、暗号と数学とのつながりを1時間目の授業の終わりまで明示しなかった結果、授業に興味を持たせることができた。しかし、合同式の仕組み(本質)に関する説明が不十分であることが学習感想及びインタビュー調査結果から明らかとなった。

(表9 仮説2に関するインタビュー調査結果)

S1 (41)	…、一番最後にやったシーザー暗号やアフィン暗号がどういう構造なのか仕組みが理解できたので、…。
S1 (67)	はい。合同式の…なんていけばいいんだらう。これまでの「 $=$ 」だと(両辺が)同じじゃないですか。合同式だと mod によって(性質から)「 $=$ 」ではあるんですけど、まったく…。
S1 (68)	例えば、さっき出てきた $27 \equiv 1 \pmod{26}$ だと 27 っていう数字と 1 っていう数字が「 $=$ 」っていうか、これまでの固定概念があったので。

第1時「暗号の歴史と利用場面」のなかで、発展的課題にあたる古典暗号系について扱った。次に、古典暗号系に関連する知識、定理として第2時では合同式の定義・性質、第3時では合同式の性質の証明を学習した。基礎的課題にあたる合同式の暗号以外の用途を学習し、発展的課題である古典暗号系に戻ってシーザー暗号の解読及び数式が暗号のなかで用いられるようになった理由をアフィン暗号への発展から学ぶ学習体系で検証した。また、第2時、第3時の冒頭に、検証授業を通して考えさせたいこと「どうして数式を使うようになったのか(暗号の原理及び合同式の仕組みにかかわる発問)」をスクリーンに映して確認して

から授業に入るようにした(図 3).



(図 3 暗号の原理及び合同式の仕組みにかかわる発問(赤枠部分) 著者作成)

検証結果 3. 学習感想のなかで、検証授業の目標「合同式が社会生活のなかで役立っていることを実感すること」に関する記述がみられた(表 10). しかし、数名しか目標に関する記述がみられなかった。これは、学習感想に何を書くのか明確にしていなかったことが原因であると考えられる。また「基礎に降りていく学び」を取り入れることで「何のために学んでいるのか」を明確にした授業展開で行ったが、何のために学ぶのかよくわからないという記述がみられたことから、目的の明確化が不十分であったことが課題であると考えられる(表 11).

(表 10 仮説 3 に関する肯定的な記述例)

<ul style="list-style-type: none"> ・暗号は子どもの遊びというイメージしかなかったけど、身近なところでもたくさん利用されていると分かった。 ・数学は勉強しても日常生活にあまり出てこないイメージでしたが、暗号はいろいろな場面に出てきそうですね。
--

(表 11 仮説 3 に関する課題を示唆する記述例)

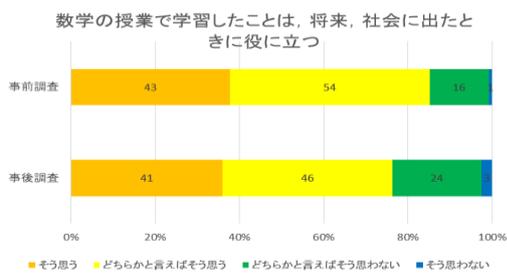
<ul style="list-style-type: none"> ・合同式の内容を何のために学習するのかを最初に話してほしい。
--

インタビュー調査結果から、仮説 3 に関すると考えられるプロトコルを紹介する(表 12). 表 12 から、S1 が社会生活のなかで合同式が役立っているとあまり感じていないのは、発展的課題にあたるのが古典暗号系だったことが原因であると示唆している。第 3 章の先行

研究での課題から、授業内容の難易度を参加者に合わせた教材開発を試みて古典暗号系の本質の理解を目標とした。しかし、社会生活のなかで、現在用いられている暗号は公開鍵暗号(RSA 暗号等)である。以上から、社会生活のなかで役に立っていることは感じられるものの、S2 のように「遠い」という感覚を持ってしまう生徒がいることが明らかとなった。これは、質問紙調査(事後)の「数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つ」の項目の肯定的な回答を維持すること、肯定的な回答の減少を抑えることができなかったことから言える(図 4). 他の項目に関しても同様に、肯定的な回答を維持すること、肯定的な回答の減少を抑えることができなかった。

(表 12 仮説 3 に関するインタビュー調査結果)

T (72)	…、合同式を学習してみて、合同式は社会(生活)のなかで役に立っていると感じた?
S1 (72)	暗号って観点から見れば役立っている感じはしたんですけど、暗号の部分というか要素というかに合同式があって、という感じだったので直接合同式が生活に役立っているかは…遠いような感じがしました。
S1 (55)	…、例えば、iPhone のセキュリティがどのような仕組みなのかとか、そういうのがあれば「こういう仕組みなんだ」という理解に進むのかなって。古典系の暗号だと「これ(合同式)を伝えるためだけにある」みたいな…なんていうんだろう。言葉を伝えるためだけに暗号があるみたいなイメージなんですけど
S2 (97)	いやもう、今のネットワークのあれから考えるとバリバリ活躍していますよね。全部今ネットワークでやっているのだから、RSA 暗号とか、暗号がなければ容易にやられちゃうから絶対役に立っていると思う。



(図4 「数学の授業で学習したことは、将来、社会に出たときに役に立つ」に関して
質問紙事前・事後調査の比較 著者作成)

5. おわりに

(1) 成果と課題

仮説の検証結果から、グループワークの有効性及び暗号を取り入れることによって、数学と暗号とのつながりは何か生徒が主体的に考えることが明らかとなった。

「基礎に降りていく学び」の考え方に従い、発展的課題を先行して授業を構成することで「現実世界の何とつながるのか」が明確となり、その後の学習へ意欲的に取り組むことを確かめることができた。しかし、合同式の仕組み(本質)に関する指摘がなされたことから、説明が不十分であり、学習意欲を生かしきれなかったことが課題であると考ええる。

合同式が社会生活のなかで役立っていることを実感させることに関しては概ね達成することができたと言える。しかし、発展的課題を古典暗号系にしたことによって、現代の社会生活のなかで役立っていることをあまり実感することができなかつた生徒がいることから、発展的課題の設定が良くなかつたことが課題であると考ええる。

(2) 今後の展望

本研究より、発展的課題を公開鍵暗号、基礎的課題を古典暗号系として授業を改善する必要があると考える。また、学習感想及びインタビュー調査結果から、合同式の仕組み(本質)に関する説明を十分に取入れた教材を開発する必要があると考える。インタビューの後半、2名の生徒に合同式の定義に関する部分で「環」

のイメージを持たせる説明を行った結果、「 \equiv 」と「 \cong 」との違いが分かりやすいと好反応だった。また、合同式の仕組み(本質)の理解だけでなく、ダイヤル式暗号(金庫等)とのつながりも明確化されることから「環」のイメージを持たせることは本研究の目的達成のために有効な手段であると考えられるので、今後検証していきたいと考える。

6. 引用文献

- 市川伸一(2001)「学ぶ意欲の心理学」PHP 研究所。
大澤弘典(2001)「暗号の教材化についての一考察」
日本数学教育学会誌 第83巻 第7号 pp.10-17。
小倉金之助(1973)「数学教育の根本問題」勁草書房。
岡部進(1983)「小倉金之助その思想」教育研究社。
川久保広臣(2013)「数学における学ぶ意欲とその指導方法の研究—小・中・高での算数・数学教育を通して—」高知県教育委員会。
国立教育政策研究所(2007)「平成17年度高等学校教育課程実施状況調査 ペーパーテスト調査集計結果及び質問紙調査集計結果」pp.449-486。
国立教育政策研究所(2019)「平成31年度(令和元年度)全国学力・学習状況調査 報告書」。
国立教育政策研究所(2016)「国際数学・理科動向調査(TIMSS2015)のポイント」2019.5.20 閲覧 [https://www.nier.go.jp/timss/index.html]。
真田克彦・大田恭一郎(1995)「『数学のよさ』についての認識調査—教師や生徒はどのように考え・感じているか—」鹿児島大学教育学部研究紀要 教育科学編 第46巻 pp.1-18。
西村保三・大久保裕介・佐分利豊・坪川武弘・福田浩之・松本智恵子・山下敏明(2014)「暗号を題材にした数学の教材開発—H25 体験ふむふむ数学クラブ『暗号のすうり』の実践報告—」福井大学教育実践研究 第39号 pp.11-20。
濱谷伸広(2008)「高校数学における有用性と活用に関する考察」上越数学教育研究 第23号 pp.117-126。
文部科学省(2018)「高等学校学習指導要領(平成30年度告示)解説 数学編 理数編」pp.23-31, 88-90 2019.7.15 閲覧[https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1407074.html]。