中学校数学における方程式の理解に関する研究

－「移項」の理解の困難性に焦点を当てて－

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 鷹野 公俊

1. 研究の目的と方法

図1は、平成29年度全国学力・学習状況調査（以下、全国調査）から出題された問題である。この問題の趣旨は、「簡単な一元一次方程式を解くことができるかどうかをみる。」とされており、全国の正答率は83.2%であった。

3 次の(1)から(4)までの各問いに答えなさい

(1) 一次方程式 $4x = 7x + 15$ を解きなさい

図1：平成29年度全国調査 数学A図

これまでに「簡単な一元一次方程式を解く問題」のうち、係数に小数や分数を含まない問題を整理すると表1のような結果となる。正答率の平均は78.2%であり、相当数の生徒ができていくことがわかる。

表1：簡単な一元一次方程式を解く問題

問題番号	問題の概要	正答率
H19A3(2)	一元一次方程式 $4(x + 5) = 80$ を解く	83.6%
H20A3(1)	一元一次方程式 $-5x + 7 = -x + 31$ を解く	78.4%
H25A3(1)	一元一次方程式 $3x + 7 = 9$ を解く	74.4%
H28A3(1)	一元一次方程式 $x + 12 = -2x$ を解く	71.9%
H29A3(1)	一元一次方程式 $4x = 7x + 15$ を解く	83.2%

図2は平成30年度全国調査の問題の一部である。この問題の趣旨は「方程式を解く場

面における等式の性質の使い方について理解しているかどうかをみる。」とされており、全国調査の正答率は64.8%であった。

3 次の(1)から(4)までの各問いに答えなさい。

(1) 一次方程式 $6x - 3 = 9$ を次のように解きました。

$$6x - 3 = 9 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$6x = 9 + 3 \quad \dots\dots \text{②}$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

上の①の式から②の式へ変形してよい理由として正しいものを、下のアからエまでの中から1つ選びなさい。

ア ①の式の両辺に3をたしても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

イ ①の式の両辺から3をひいても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

ウ ①の式の両辺に3をかけても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

エ ①の式の両辺を3でわっても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

図2：平成30年度全国調査 数学A図

これまでに「等式の性質の使い方」の理解を問う問題のうち、移項の意味を選ぶ問題を整理すると、表2のような結果になる。正答率の平均は65.2%であり、移項することの意味と等式の性質について正しく関連づけられている生徒は多くないことがわかる。つまり、生徒は簡単な方程式を解くことはできるが、その過程で行われる移項の意味と等式の性質については関連づけられていないことが示唆される。

以上で確認した全国調査の結果をもとに、本研究のリーサークエスチョンを次のように定めた。

「生徒が移項することの意味と等式の性質について正しく関連づけられないのはなぜか。」

表 2：移項の意味を選ぶ問題

問題番号	問題の概要	正答率
H19A3(1)	一元一次方程式 $7x = 5x + 6$ を解く とき、移項の意味を 選ぶ	61.7%
H21A3(1)	一元一次方程式 $4x + 7 = 15$ を解く とき、移項の意味を 選ぶ	69.1%
H25A3(1)	一元一次方程式 $6x - 3 = 9$ を解くと き、移項の意味を選 ぶ	64.8%

このリサーチクエスチョンを解決するために、本研究の課題を次のように設定する。

- ① 移項の根拠を理解させる教育的意義について考察する。
- ② 移項の根拠を理解することの困難性の所在を明らかにする。
- ③ 移項することの意味と等式の性質について正しく関連づけさせるような指導方法を検討する。

2. 移項に関する先行研究

2.1 移項の根拠を理解させる教育的意義

全国調査で度々出題されているように、移項の根拠を理解させることは教育的意義があると考えられる。ここでは、実際に先行研究ではどのように述べられているかを調べることによって、移項の根拠を理解させる教育的意義について再考していく。

杉山 (2006) は次のように述べている。

「覚えることは少ないけれども、それから多くのものが作り出せるようにしておく、忘れても思い出せるようにしておく、こういうことが大事なことである。」

杉山は移項について述べているわけではないが、この言葉は本研究に対しても指針をあたえてくれている。全国調査の問題に置き換えて考えてみると、移項をすることと等式の性質との関連を忘れていたとしても、問われ

れば答えられるように指導することが大切であることを意味している。

清水 (2007) は計算手続きには二つの要請があることを指摘している。第一に「計算アルゴリズムは形式的・機会的に実行されるべきである」という「形式性」、 「機械性」に由来する要請、第二に「数学の手続きについて、求められればその根拠を示せる状態にあるべきである」という「論理性」に由来する要請である。後者は、杉山の意見と一致しており、移項の意味と等式の性質については関連づけることの重要性がわかる。清水が提言する二つの要請は次のように換言できる。前者の要請は「できる」こと、そして後者の要請は「わかる」ことを生徒に求めている。これは「わかって、できる」ことを求める、新学習指導要領の「知識・技能」の評価項目と同様の内容を示している。

以上より、移項の根拠を理解させる教育的意義については確認できた。したがって、本研究においても移項の根拠を理解させることを目的として指導方法を検討していく。

2.2 移項の根拠を理解することの困難性

移項の根拠を理解することの困難性を詳細に分析している研究は、筆者の知る限りでは行われていない。そこで、本研究では先行研究の仮説をもとに、移項の根拠を理解することの困難性を明らかにしていく。

大谷他 (2006) は次のように述べている。

「生徒は、『天秤』モデルから、等式の性質を常識的・直感的に受け入れ、移項の考えのもとになる代数和の考え、変形の形式性、同値な方程式という代数的側面の理解が浅いまま、機械的な習熟に注意を向ける。」

大谷らは調査などを行ったわけではなく、教員の経験からこの意見を述べている。だが、指導上の留意すべき点を指摘しており、本研究においても指導方法を検討する際に参考にしていく。その留意すべき点とは以下の四点である。

- ① 天秤のモデルを用いた等式の性質の指導
- ② 代数和の指導
- ③ 変形の形式性の指導

④ 同値な方程式の指導

この四つの留意すべき点を参考にしながら指導方法を検討していく。

2.3 指導方法の検討

まず、①天秤のモデルを用いた等式の指導について検討していく。Skemp (1973) はピアジェの「シエマ」の理論から次のように述べている。

「適切なシエマとは、速攻的というよりも長期間の学習課題を考慮に入れたものを意味している。たとえば、方程式の解法は、ある場合には、天秤の考えに基づいている。おのおのの皿に同じ重さを足したり、引いたりすれば、バランスは維持される。そうして、未知の重さとバランスする重さをすることができる。このモデルは、また『符号を変えて他の辺に移す。』という移項の原則を正当化する。これは左の皿に（たとえば）3ポンド足すのと、右の皿から3ポンド取り去るのとは同じことだからである。」

このように、Skemp は天秤のモデルには一定の価値があることは認めている。だが、『両辺のバランスをとる。』というシエマは、次のような方程式には適用できない。」とし、次のような方程式を例示している。

$$x + 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x^2 - 3x = 4$$

このように、天秤のモデルは長期的にみれば、適切なシエマを与えるとは言い難い。しかし、Skemp が「上記のシエマは、射程は短いにしても、ときどき教えられているような説明抜きルールの寄せ集めよりは、はるかにましである。このシエマは、子どもに意味づけを与え、かくして、数学は有意味な活動であるという全面的な信念を作るのに寄与するからである。」と述べる通り、方程式指導の初期段階では価値があるモデルであると考えられる。

また、平林 (1987) は天秤のモデルを例に挙げた上で次のように述べている。

「数学的教具・学習具としての物理的模型は、今日ではさまざまなものが用意されている。

しかし、その批判の観点は、その物理的構造や機能よりも、その利用の仕方におかれるべきである。このことは、物理的模型は、物理的シエマという、数学的概念の理解のための心的道具をつくりだすものであり、直接数学的概念を『具象化』したものではないと考えれば、十分に納得できることであろう。」

このように、平林も天秤のモデルは一定の価値があり、留意すべき点はその用い方であると述べている。

Skemp や平林が指摘するように天秤モデルには限界もあり、生徒はいずれ物理的模型から脱却しなければならないが、方程式の指導の初期段階においては有効な手段であると考えられる。そこで、本研究においても方程式の指導の初期段階では、天秤のモデルを用いた指導方法を検討することとする。

次に、②代数和の指導について検討していく。「代数和」とは算数・数学教育における用語であり、簡潔に言えば「正・負の数や式を加法記号で結んだ式」のことである。例を挙げると、次のⅠ、Ⅱのような式のことである。

$$(+7) + (-9) + (-3) \cdots \text{Ⅰ}$$

$$7 - 9 - 3 \cdots \text{Ⅱ}$$

先述した大谷らは方程式における代数和について例示していないが、方程式 $x + 9 = 4$ を解く際の式変形、 $x + 9 + (-9) = 4 + (-9)$ のような式変形について述べていると考えられる。代数和の指導は中学校第一学年の単元『正負の数』において重点的に指導する。そこで本研究では、単元『方程式』の3時間目で等式の性質を使って方程式を解く際に、簡易的に指導することとする。

次に、③変形の形式性の指導、④同値な方程式の指導について検討していく。清水 (2007) は次のように述べ、「できるだけわからない」という状態の学習指導の改善のためには「メタ領域」での活動を促すことが必要であると述べている。

『『できるだけわからない』という問題に関わる学習指導の改善のためには、児童・生徒の

導入し、等式の性質を用いて方程式を解く方法について学ぶ内容である。ここで重点的に指導した内容は、「『解く』とは $x = \square$ の形に変形する」と、「解を元の方程式に代入すれば、等式は成り立つ」ことの二点である。この二つの内容は、④同値な方程式を意識させることを目的としている。

4時間目では、加藤の指導の枠組みを参考にして、図6,7のようなワークシートを2枚使用した。生徒がワークシート1枚目を解答したのちに、ワークシート2枚目を配布するという手順をとった。

1年 組 番 氏名: _____

☆成績とは関係ありませんので、リラックスして取り組んでください。

問1. 次の方程式を解きなさい。
(スペースは十分にあるので、消しゴムは使わず計算過程を残しておいてください。)

$$3x = 6 + 2x$$

図6: ワークシート1枚目

1年 組 番 氏名: _____

☆成績とは関係ありませんので、リラックスして取り組んでください。

問2. こうたさんは、問1の計算について、次のように行いました。

$$\begin{aligned} 3x &= 6 + 2x \\ 3x - 2x &= 6 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

この、こうたさんの計算の方法について、あなたの考えに合うものを次の(A)～(E)の中から選んで○をつけてください。

(A) こうたさんの考えは正しい。
(イ) こうたさんの考えはまちがっている。
(ウ) 自分とはちがう考えだがこうたさんの考えも正しい。
(エ) その他 ()

上のように選んだ理由など、あなたの考えを書いてください。
(あなたの考え)

(へアの人の考え)

図7: ワークシート2枚目

図6で示すワークシートの1枚目では、加藤の枠組みの「I. 個人的な問題解決を行う」という手順を踏まえている。生徒は、文字が右辺に存在する方程式をみるのは初めてである。だが、前時に等式の性質を用いて方程式を解く方法について学んでいるため、黒板に等式の性質が掲示してあればこの方程式を解くことは可能であると判断した。予想される生徒

の解答方法は、等式の性質を用いた解法や数を代入して解を求める方法などである。

問1. 次の方程式を解きなさい。
(スペースは十分にあるので、消しゴムは使わず計算過程を残しておいてください。)

$$3x = 6 + 2x$$

7個、17個、6個、12個

$x = 6$

$3x = 6 + 2x$

図8: 生徒Aの解答

問1. 次の方程式を解きなさい。
(スペースは十分にあるので、消しゴムは使わず計算過程を残しておいてください。)

$$3x = 6 + 2x$$

$$3x - 2x = 6 + 2x - 2x$$

$$x = 6$$

$x = 6$

図9: 生徒Bの解答

生徒Aは天秤のモデルを利用して正答に至っていることが確認できる。活動の様子は確認できなかったが、天秤の左右の皿から、 x のブロックを取り除くことによって、解を求めたことが予想される。また、等式変形を用いて解を求めることも試みているが、正答には至っていない。生徒Bは等式の性質を用いて正答に至っていることが確認できる。

その他の反応は、移項を用いた方法や、数を代入して解を求める方法などがあつた。

図7で示すワークシートの2枚目では、加藤の枠組みの「II. Iで行った個人的な解決活動について、話し合いを通して、他者の解決活動や自己の解決活動について理解を深める。」と「III. Iで行ったメタ認知的活動について、話し合いを通して、他者のメタ認知的活動や自己のメタ認知的活動について理解を深める。」という手順を踏まえている。本研究では他の生徒と交流する前に、こうたさんという架空の生徒の解答を示すこととした。この活動を取り入れることによって、生徒は移項を学習していない段階で移項を用いた解法を読むことができ、自身の考えと比較できると考えた。また、移項を予習している生徒に、移項の根拠について考え直す機会を与えることができると考えた。こうたさんの考え方は合っているかどうかを個人で考えた後に、ア

からエの考えを全体で紹介し、それぞれの立場を踏まえた意見交流を行うこととした。

この活動では、等式の性質を用いた式変形がもとになっていることに気づくことや、解を元の方程式に代入する活動を促すことができると考えた。③変形の形式性を意識させることを目的とした活動である。生徒の記述は次の通りであった。

○アと解答した生徒の反応例

- ・ $3x - 2x = 6 + 2x - 2x$ を省略しているだけ
- ・ 元の式に $x = 6$ を代入すると成り立つから
- ・ 移項をしているから

○イと解答した生徒の反応例

- ・ 本当は左辺と右辺の両辺から同じ数をひかなければいけないから

○ウと解答した生徒の反応例

- ・ 一応 $3x - 2x = 6 + 2x - 2x$ を書いた方がいいと思った

○エと解答した生徒の反応例

- ・ 両辺に同じことをしていないのはなぜ。 $+2x$ が $-2x$ になっていない
- ・ わからない

4. 調査問題

4.1 調査の目的と方法

この調査の目的は、「方程式を解く」問題と「移項の意味を選ぶ」問題の正答率を全国調査の結果と比較することによって指導の効果の有無を明らかにすることである。

調査では図 10 に示すような調査紙を用いることとする。問 1 は平成 30 年度の全国調査の問題を、問 2 は平成 29 年度の全国調査の問題を引用している。

4.2 調査の対象と時期

調査の対象者は指導の対象者と同様である。実施時期は 10 月の上旬であり、対象者は単元『方程式』の学習を終えている。全国調査の実施時期は中学校第 3 学年の 4 月の下旬であるため、正答率の単純な比較はできない。だが、調査の目的は「方程式を解く」問題と、「移項の意味を選ぶ」問題との正答率の関形を調べることであるので、この時期でも可能である

と判断した。

調査問題 ☆これは成績には関係ありませんのでリラックスしてやってください。
 ☆途中式もしっかりと記述してください。

組 番 氏名

問 1 一次方程式を解きなさい。

$$4x = 7x + 15$$

問 2 一次方程式 $6x - 3 = 9$ を次のように解きました。

$$6x - 3 = 9 \cdots \text{①}$$

$$6x = 9 + 3 \cdots \text{②}$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

上の①の式から②の式へ変形してよい理由として正しいものを、下のアからエまでの中から 1 つ選びなさい。

ア ①の式の両辺に 3 をたしても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

イ ①の式の両辺から 3 をひいても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

ウ ①の式の両辺に 3 をかけても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

エ ①の式の両辺を 3 でわっても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい。

図 10：調査問題

4.3 解決の比較に基づく分類

表 3 と表 4 はそれぞれ問 1 と問 2 の反応率をまとめたものである。解答類型は全国調査を参考にし、全国の反応率は問 1 は平成 30 年度、問 2 は平成 29 年度の反応率を表している。

まず、表 3 に示す問 1 の結果から分析していく。特徴は次の二点である。

第一に、対象者の 1 の反応率が全国よりも大きく下回っている点である。対象者の反応率は、全国の反応率と比べて 23.2 ポイント低くなっている。この大きな差は、調査の実施時期が大きく関わっていると考えられる。先述した通り、全国調査の実施時期は中学校第 3 学年の 4 月の下旬であり、今回の調査の実施時期は中学校第 1 学年の 10 月の上旬である。生徒は中学校第 1 学年から第 3 学年までの期間の中で、方程式の学習の理解が進んでいくと考えられる。方程式の学習に関わってくる単元としては、『比例と反比例』、『連立方程式』、『1 次関数』がある。

表 3：問 1 の反応率のまとめ

	解答類型	全国の 反応率 (%)	対象者 の反応 率(%)	正 答
1	-5 と解答し ているもの。	83.2	60.0	○
2	5 と解答して いるもの	3.6	9.4	
3	$\frac{15}{11}$ と解答して いるもの	0.1	0.0	
4	$-\frac{15}{11}$ と解答し ているもの	0.0	0.0	
9	上記以外の解 答	6.9	11.3	
0	無解答	6.2	18.9	

表 4：問 2 の反応率のまとめ

	解答類型	全国の 反応率 (%)	対象者 の反応 率(%)	正 答
1	アと解答し ているもの	64.8	66.0	○
2	イと解答し ているもの	11.1	15.1	
3	ウと解答し ているもの	12.3	7.5	
4	エと解答し ているもの	11.2	1.9	
99	上記以外の 解答	0.0	1.9	
0	無解答	0.6	7.5	

第二に、対象者の 2, 9, 0 の反応率が全国よりも大きく上回っている点である。対象者の 2, 9, 0 の反応率は、全国の反応率と比べてそれぞれ 5.8 ポイント、4.3 ポイント、12.7 ポイント高くなっている。特に、無解答の 0 の反応率が高くなっているのが特徴的である。本研究では移項に焦点を当てているので、移項のみの反応率についてまとめる。その結果は表 5 の通りである。

表 5：移項に焦点を当てた反応率

タイプ	反応率
$-3x = 15$ と変形	79.2%
その他の式変形	20.8%

このことから、生徒は移項についてはある程度の理解を示していることがわかる。しかし、その後の式変形において両辺を同じ数で割ることを理解していなかったり、計算間違いをしたりしているため、2, 9, 0 の反応率が高くなっていることが明らかになった。

次に表 4 で示す、問 2 の結果を分析していく。対象者の 1, 2 の反応率が全国よりも高く、3, 4 の反応率が全国よりも低くなっている点が特徴的である。対象者の 1, 2, 3, 4 の反応率は、全国の反応率と比べてそれぞれ、1.2 ポイント、4.0 ポイント高く、4.8 ポイント、9.8 ポイント低くなっている。この結果から対象者は、「移項は、乗法、除法ではなく、加法、減法を根拠とする」ことはある程度理解していると考えられる。実際に 1, 2 の項目の合計と、3, 4 の項目の合計をまとめると表 6 のような結果となる。

表 6：1, 2 の合計と 3, 4 の合計の比較

解答類型	全国 (%)	対象者 (%)
1, 2 の反応率の合計	75.9	81.1
3, 4 の反応率の合計	23.4	9.4

表 6 から、対象者の 3, 4 の反応率の合計が全国と比べて、14.0 ポイント低くなっていることがわかる。この結果は本研究の成果といえる。しかし、表 4 が示すように、正答率は 1.2 ポイントの上昇にとどまっていることが課題である。この原因は、大谷らの述べる代数和の考えが未定着であることが考えられる。つまり、生徒は項の符号を意識できていないため、移項の根拠である、加法と減法を区別できないのではないかと考えられる。

5. 考察

ここでは授業で用いたワークシートの記述や、調査問題の結果から得られた示唆を元に、

移項の指導の方法について検討していく。

第一に、代数和の考えを、方程式の学習においても指導すべきという点である。表 6 のような結果から、移項の根拠を答えられないことは、「代数和」の考えが未定着であることに起因していると分析した。そこで、代数和の指導は単元『正負の数』だけでなく、単元『方程式』においても行うべきであると考え。具体的な方法は次の通りである。清水 (2011) では、単元『正負の数』における代数和の指導を次のような問題を通して行っている。

課題 2 $5 - 8 + 4 - 9$ を直してみよう。

この問題を提示した後に、

$$(+5) + (-8) + (+4) + (-9)$$

と式変形できることを確認し、

$$\boxed{+5} \quad \boxed{-8} \quad \boxed{+4} \quad \boxed{-9}$$

のような項のカードを利用し、0 を作る活動を行っている。これを方程式の学習に置き換えると、方程式 $x + 9 = 4$ であれば、

$$\boxed{+x} \quad \boxed{+9} \quad \boxed{+4}$$

のような項のカードを用意し、左辺を文字だけにする活動である。この活動を行うことで、単元『方程式』においても代数和の指導を行うことができ、移項の根拠を考える際の助けとなることを期待できる。

第二に、移項の指導を行う前に等式の性質を用いた方程式の解法を定着すべきという点である。本研究では、「こうたさんの考え」という架空の人物が行う操作として移項を紹介し、あっているかどうかを検討する活動を行った。架空の人物の考えではなく、生徒自身から出た考えであれば、より実感を伴って、移項の意味について理解することができたと考える。また、調査問題の結果から、移項の意味について理解していても、方程式の正答率は低いままであるという課題も明らかになった。移項の指導を行う前に等式の性質を用いた解法を定着させることにより、「わかって、できる」という生徒の育成を目指したい。

6. おわりに

本研究のリサーチクエスションは「生徒が

移項することの意味と等式の性質について正しく関連づけられないのはなぜか。」であり、このリサーチクエスションを解決するために、

- ① 移項の根拠を理解させる教育的意義について考察する。
- ② 移項の根拠を理解することの困難性の所在を明らかにする。
- ③ 移項することの意味と等式の性質について正しく関連づけさせるような指導方法を検討する。

という三つの課題を設定した。この課題の解決策を考えていく中で、「代数和の考えを、方程式の学習においても指導する」ことや、「移項の指導を行う前に等式の性質を用いた解法を定着させる」という課題が出された。

今年度は新型コロナウイルスの影響により、インタビュー調査を行うことができず、生徒の考えを質的に調査することができなかった。今後も研究を継続し、移項することの意味と等式の性質について正しく関連づけさせるような指導方法を検討していきたい。

7. 参考文献

- ・平林一栄 (1987), 数学教育の活動主義的展開, 東洋館出版, 329-330.
- ・加藤久恵 (2000), 数学的問題解決におけるメタ認知の機能とその育成に関する研究, 日本数学教育学会誌数学教育学論究, 21-27.
- ・中原忠男他 (2000), 算数・数学科重要用語 300 の基礎知識, 明治図書, 195.
- ・日本数学教育会編 (1971), 数学的思考方とその指導 中学校編, 明治図書, 102・103.
- ・文部科学省・国立教育政策研究所 (2007-2018), 全国学力学習状況調査報告書.
- ・大谷実・漢野有美子・中村雅恵 (2006), 一次方程式の学習における相当関係の意味の発達, 数学教育論文発表会論文集 37, 687・688.
- ・R.R. Skemp (1992), 数学学習の心理学, 新曜社, 40・41.
- ・清水宏幸 (2011), 数学言語を使いこなせ! 「文字式に強くなる!!」, 明治図書, 29-31.
- ・清水美憲 (2007), 算数・数学教育における思考指導の方法, 東洋館出版.
- ・杉山吉茂 (2006), 杉山吉茂算数教育論選集 豊かな算数教育をもとめて, 東洋館出版, 28.