

「数学的に説明する」ことができる生徒の育成

—計算過程をふり返り、式を読む活動に焦点を当てて—

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 数学分野 小松琢朗

1. 問題と目的

いま、中学校の現場においても新学習指導要領において育成を目指す資質・能力を伸ばし、評価するために「レポートで自分の思考を表現すること」を生徒に求めるなど、「数学的に説明すること」の重要性が増してきている。しかし、全国学力・学習状況調査において選択式や短答式で解答する問題の正答率はある程度良い結果を残している生徒たちが、記述式で解答する問題（数学的に説明することを求める設問）となると正答率が伸び悩むという現状がある。（表 1）

表 1 全国学力・学習状況調査より各年度の解答形式別正答率の全国平均

	H29	H30	H31
選択式	41.3%	53.8%	61.5%
短答式	57.8%	66.3%	56.2%
記述式	33.1%	21.7%	27.9%

この「数学的に説明すること」はどのような授業で育まれていくのだろうか。

2. 研究内容

数学では式に表すことができれば形式的に処理し答えを求めることが可能になるという良さがある。しかし、本単元の前までは、計算過程や計算結果をふり返ることによって問題構造を読み取ることのような文字を用いることの良さについては、本校生徒は実感していないことが多いと感じている。そのため文字式の有用性にも気づきにくくなる。本時の授業では単元「数と計算」のまとめとして鼓笛隊の行進を用いて歩く道のりの差を求める問題を扱

う。この問題を通して生徒には

- ① 一番内側と外側の人の歩く道のりの差を求める計算を事象に即して解釈することを通して、成り立つ事柄を判断し、その理由を数学的に説明すること。
- ② ①を読み取らせる際に計算過程をふり返ることを通して、文字を用いると計算の構造が見やすくなるということに気付かせ、文字を用いた計算の有用性の一面を感じ取ること。

を求めていく。この①と②は全国学力学習状況調査の「ISSとひまわり7号」（平成24年）や「バスツアー」（平成30年）の結果から全国的に課題であることが指摘されている。今回はこの2つの課題を解決するために有効な手立てについて研究した。

3. 本時の授業について

(1) 単元 第2学年「式の計算」

(2) 授業時期・学級

第1時：令和2年7月15日 5校時

第2時：令和2年7月16日 5校時

勤務校である中学校2年生の1学級

(3) 題材名「歩く道のりの差を求めよう」

(4) 生徒の実態

生徒は昨年度までの授業では問題の答えを求めることを主としてきており、この問題のように問題解決の過程をふり返って式を読み、計算過程や結果から新たな発見をするという経験はあまりしてきていない。そこで、本年度は問題解決の過程をふり返り、その構造をつかむ経験を重ねるよう意識して授業

を行ってきた。しかし、今回の題材のような現実の世界から問題を見出し、数学化して問題解決していく経験はできていない。

(5) 教材について

本教材は鼓笛隊の行進を扱ったものである。鼓笛隊は縦横の列をそろえて行進し、コーナーでもその列を崩さずに歩く。その中のある横列に注目すると、コーナーにおいて一番内側の人と一番外側の人の歩く道のりには差があることに気付く。この差は回転半径には依存しない。このことはいくつかの具体数でたしかめてみると分かる。この「歩いた道のりの差は回転半径に依存しないこと」は生徒の感覚とは異なる結果であると推測される。生徒たちは回転半径が大きくなれば歩く長さの差も大きくなるだろうと考えるのではないか。この不思議さを解き明かしていくための道具として文字を使用し、その有用性を感じさせたいと考えた。本時の場面設定としては、始めはゴール手前の回転半径 100cm の場面で一番内側を歩く人間と一番外側を歩く人間との歩く道のりの差を求めさせる。次に行進途中のトラックのコーナーの回転半径である 1572cm での歩く道のりの差を求めさせる。この差を計算すると回転半径 100 cm でも 1572 cm でも、差は 183π cm となる。なお、この教材は全国学力学習状況調査「ISS とひまわり 7号」(平成 24 年)を参考に作成した。

(6) 指導上の工夫について

本授業では具体数での計算をふり返り、そこで気づいた「回転半径が消去される」という計算の構造について文字を使用して確かめていくことが目標である。本授業のひとつのポイントは、「(5) 教材について」でも述べたが、一番内側の人と一番外側の人の歩

く道のりの差が回転半径に依存せず 183π という結果で変化しないという不思議さである。回転半径が 100 cm の場合と 1572 cm の場合のみを考えるのであれば、その計算過程をふり返り、問題文の数値をあえて計算せず元の数のまま式を読むことで回転半径がキャンセルされていることに気づくことができると思われる。そこでこの 2 つの場合で終わるのではなく、「計算の構造をみてみよう」と生徒に投げかけることで文字を使用させてみたい。それによって「計算過程をふり返って式をよむ」「計算過程や計算結果をもとにわかったことを説明する」という視点を生徒に与え、「数学的に説明する」ことが可能になっていくのではないかと考えている。またその他として次の点も工夫した。

① 2 時間構成で行うこと

1 時間目は具体数を用いた計算を主に、2 時間目はその具体数を計算する中で発見したことを、数をあえて計算せず問題文の数値のまま式を読んだり、文字を用いて計算過程や結果ふり返ったりする経験が主になるようそれぞれ目的を分けて構成した。

② 現実事象の数学化と結果のたしかめの重視

本時のような日常の活動を数学的に問題解決していくためには「課題把握」が重要であると考え。そのため問題場面を何名かの生徒に実演させ、その様子を数学化していく手順に丁寧に取り組ませた。また、解決の結果が実際の問題場面と一致しているかを再度実演によって確認させることで、より計算過程や結果に表れる数に意味があることを実感させた。



▲生徒による実演の様子（課題把握）



▲生徒による結果の確かめ

③ 生徒同士の口頭説明を授業中に設定すること

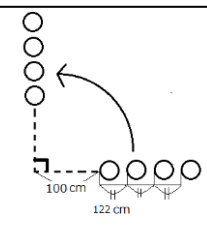
私はこれまでの研究において、「数学的に説明すること」は口頭で行うことが可能な生徒ほど記述することができると考えている。そのことからでき

る限り授業において口頭説明を行う場面を設定したいと考えている。本授業においても「数学的に説明する」ために重要なポイントにおいて「口頭説明」を取り入れた。なお、ここでいう口頭説明とは「近くの生徒同士自由にグループを形成し、そのグループ内で互いに口頭による説明をしあう」というものである。

(7) 本時のねらい

- ・ 計算過程や結果をふり返り、わかったことをもとに数学的に説明する。
(数学的な見方・考え方)
- ・ 数を文字で置き換えて計算することのよさや、元の数計算してしまわないでそのまま式変形をしていくことで構造が見えてくることに気付かせる。(数学的な見方・考え方)
- ・ 歩く道のりの差は半径に関わらないことの面白さを具体的な数の計算や文字式の計算を通して味あわせる。(関心・意欲・態度)

(8) 実際の授業展開

過程	学習内容及び生徒の活動	生徒の反応	備考
課題把握 (17)	1 問題をつかむ 鼓笛隊では4列縦隊で列を揃えて行進します。曲がるときも4人で列を揃えて歩くとき、一番内側の人と、一番外側の人では一つの曲がり角で歩く道のりはどのくらい違うのでしょうか。		
問題解決 (12)	・状況を簡略化した図を示し、具体的な長さを与える 一番内側の人曲がるカーブの半径は100cm 隣の人との間隔は122cm 2 一番内側の人歩く道のりと一番外側の人歩く道のりの差を求める	・人によって歩いている長さがだいぶ違う。 ア π を使って計算する 一番内側の人歩く道のりは 100×200 $200 \times \pi = 200\pi$ $200\pi \times 1/4 = 50\pi$ 一番外側の人歩く道のりは $466 \times 2 = 932$ $932 \times \pi = 932\pi$ $932\pi \times 1/4 = 233\pi$	 <ul style="list-style-type: none"> ・現実事象を数学化するために、人の歩く軌道を円とみなすなどの検討を行う。 (口頭説明①) ・解き方の確認をさせるため生徒同士で教え合いを行った。(口頭説明②) ・外側の人直径を出すため

全体 追究 (12)	3 自分の求めた方法と 値を発表する	$233\pi - 50\pi = 183\pi$ 183π cm の差がある イ 分配法則を用いる $2\pi \times (100+122 \times 3) \times 1/4 - 2\pi \times 100 \times 1/4$ $= 2\pi \times (100+366-100) \times 1/4$ $= 2\pi \times 366 \times 1/4 = 183\pi$ 183π cm の差がある	の半径の表し方を教え合う 時間をとる。(口頭説明③) ・ほぼすべての生徒が解き終 わったところで答えと計算 式を生徒間で確認させた。 (口頭説明④) ・イの解き方は教師から提示 した。分配法則の説明はせ ず、式のみを提示し生徒に式 を読ませた。(口頭説明⑤) ・発展した課題の内側の人と 外側の人の歩いた道のりの 差を求める方法について話 し合わせた。(口頭説明⑥)
課題 の発 展 (9)	4 課題の発展 4 列縦隊でトラックを行進します。このとき一番内側の 人と、一番外側の人では一つの曲がり角で歩く道のりは どのくらい違うのでしょうか。 5 トラックを 4 列縦隊行進するときの一番内側の人の 歩く道のりと一番外側の人の歩く道のりの差を求める。		
ここから第2時			
前時の ふり返 り (17) 発表 (6)	5 前時の内容をふり返 る 6 自分の求めた値とそ の方法を発表する ・ウを取り上げ、歩く道 のりの差の求め方を確認 する。	183π (574.62) cm について想像 以上に大きな差だった。 ウ 分配法則を用いる $2\pi \times (1572+122 \times 3) \times 1/4 - 2\pi \times 1572 \times 1/4$ $= 2\pi \times (1572+366-1572) \times 1/4$ $= 2\pi \times 366 \times 1/4 = 183\pi$ 183π cm の差がある	・多目的スペースで再度生徒 に問題場面を実演させ、実演 した生徒にそれぞれの歩い た軌跡を巨大な模造紙にペ ンで実寸で描きこませた。 ・ウの解き方を確認したの ち、「なぜ歩く道のりの差が 183π で変化しないのか」と 問いかけ、その理由につい て話し合わせた。(口頭説明 ⑦⑧⑨)
過程の ふり返 り (22)	7 歩く道のりの差が一 つ前の課題と変化しな かった理由について考える	・分配法則を使ったところに 注目すると $(1572+366-1572)$ トラックの半径が消えて答え に関係がなくなっている。	
まと め (5)	8 文字を用いて計算の 一般化を行う 9 検証問題をとく 10 学習をふり返り、学 習感想を書く	・回転半径を r 、人と人との間 の長さを x とすると $2\pi(r+3x) \times 1/4 - 2\pi r \times 1/4$ $= 2\pi(r+3x-r) \times 1/4$ $= 2\pi \times 3x \times 1/4 = 3\pi x/2$ ・たしかに半径の r が途中で 消えている。	・検証問題については『5. 検証問題の結果とその考察』 を参照

(9) 評価について

- ・ 生徒の授業の様子を観察し、記録につける。
- ・ 生徒それぞれがどのような計算方法を用いて歩いた道のりの差を求めているか、活動の様子を観察する。

- ・ 授業後のノートや学習感想から生徒一人一人の考えを丁寧に見とり、考察する。

4. 授業の実際とその考察

- ① 「式を読むこと」について
 「3 (8) 実際の授業」の「学習内容

8 歩く道のりの差が一つ前の課題と変化しなかった理由について考える」において生徒とともに式を読む活動を行った。回転半径が 1572 に伸びても歩いた道のりの差が 183π で変化しないことを確認したのち、「なぜ変化しないのか」と投げかけたところ、この問いかけに対して生徒Uが以下のように考えを説明した。

「1932 っていうのは…(中略)…(1938 - 1572 に下線を引き、 $1572 + 366 - 1572$ と板書する) …ここ (1572 を指さす) とここ (-1572 を指さす) を先に計算するとここ (366 を指さす) が残るので、で、ここ (1572 を指さす) っていうのは、ここ (図の回転半径の長さを指さす) の半径だから、これをいくら大きくしてもここ (1572 を指さす) とここ (-1572 を指さす) が消しあっちゃうので、どんなに大きくしても最終的に残るのはここ (366 を指さす) だけだから…」

$$\begin{aligned} & 1938 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{4} - 1572 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{4} \\ &= (1938 - 1572) \times 2 \times \pi \times \frac{1}{4} \\ &= 366 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{4} \\ &= 183\pi \end{aligned}$$

▲実際の板書の様子 1

このように板書ではまとめて書かれていた 1938 を回転半径である 1572 と一番内側の人から一番外側の人までの長さである 366 に分解し、回転半径が消去されていることを視覚化して説明していた。さらに生徒Uの説明に対して生徒同士による口頭説明を設定したのち、生徒Aと生徒Lの2名が黒板で説明を行った。その様子は以下の通りである。

生徒A「この 1938 っていうのは、一番外側の人々の半径で、1572 って…内側はこの 1572 (図の回転半径の長さ

を指でなぞる) だけだけど、外側はこの 122 (図の人と人との間を指さす) が、人と人との間の 122 が 3 つあるから、この分 ($1572 + 366 - 1572$ の 366 を指さす) も足して、…たしたやつがこの 366 で、1932 を分解すると、1572 と 366 になる。で、その 1572 はこっちでマイナス 1572 っていうから…ここが打ち消し合って 366 っていうのが残る。」

生徒L「A君のと同じで、ここ (図の回転半径を指でなぞる) が 1572 で、ここ (図の人と人との間を指さす) は 366 で 1932 っていうのはこの 2 つ (1572 と 366) を足した数で、これが分解すると、 $1572 + 366$ で、この 1572 から 1572 をひくと、366 が残るからです。」

この説明の後、「最初の課題でも同じことが起きているのか」という問いかけを行ったところ、多くの生徒が頷く様子が見られた。回転半径 100 cm の場合にも「 $466 - 100$ 」という式を「 $100 + 366 - 100$ 」と分解して板書し、100 が打ち消し合っていることを確認させた。ここまでで生徒たちは式を読み、結果が 183π で変化しない理由を理解できている様子が見られた。

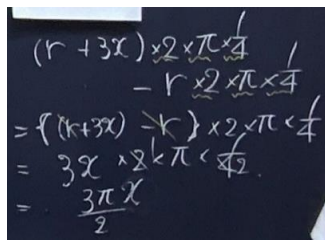
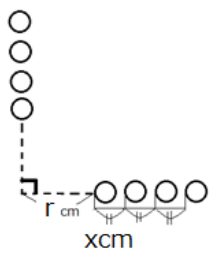
② 「文字を用いて計算の構造をつかむ」ことについて

ここで「こういうのを見るのに強い道具があったよね。」と問いかけたところ「文字」と生徒たちは即答した。また文字を使用することについて「レントゲン写真」と表現した。この言葉は「文字を用いて計算していくことで、数を用いた計算では見えてこなかった問題の構造が透けて見えてくること」をある生徒が本単元におけるこれまでの授業のふり返りで「レントゲン写真」と表現したことがもととなっている。

今まで文字でやる意味があるのと思っていただけ、便利なのがわかった。文字でやるとレントゲン写真みたいに式の中がわかりますね!

▲生徒のふり返り 1

このように生徒たちはここまでの学びにおいて「文字を使用すると計算の構造をつかむことができる」と感じた経験をもっている。ここでも数を文字に置き換えて計算していくことで計算の構造を明らかにしようとしていることから、この生徒たちは文字を一般化された数として試みていると考えられる。文字を使用するにあたって、以下のモデル図1を用いて板書の様子2のように計算を行った。



▲文字を用いたモデル図1 (左)

▲実際の板書の様子2 (右)

この計算過程から回転半径を表す r が消去され計算結果を表す文字式には r が含まれていないこと、計算結果から歩いた道のりの差は人と人の間の長さを表す x に影響されることを確認した。文字を使用して計算したことにつ

いては以下のようなふり返りが書かれていた。

距離の差を求めて、差が変わらない理由が文字を使えばみえるということに驚きました。

▲生徒のふり返り 2

内側の人と外側の人歩く長さが違い、どう求めるのかがわかった。また「 x 」や「 r 」など文字は本当にたくさんのことに役立っているのだなと思いました。

▲生徒のふり返り 3

このように生徒たちは文字を用いたことで計算の構造を明らかにでき、文字の使用を有用だと感じたようである。さらに文字には意味があり、その意味を読み取ることが大事であるということも感じたようである。

5. 検証問題の結果とその考察

今回は検証問題として全国学力学習状況調査「ISSとひまわり7号」(平成24年)を使用させていただいた。以下がその問題内容である。なお、実際には写真部分は生徒に引用を明確にしたうえで提示している。

1 下の表は、国際宇宙ステーション(ISS)と気象衛星ひまわり7号についての情報です。

	ISS	ひまわり7号
全長	約108.5m×約72.8m (サッカーのフィールドと同じくらい)	約30m
地表からの高さ(高度)	約400km	約35800km
地球の周りを1回するときにかかる時間	約1.5時間	約24時間

次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

(1) 地球儀を地球に見立て、地球とISSやひまわり7号の位置関係について考えます。ISSが地球儀の表面から1cmの高さを回っているとするとき、ひまわり7号は地球儀の表面からおよそ何cmの高さを回っていることになりませんか。下のアからオまでの中から正しいものを1つ選びなさい。

ア 約9cm イ 約16cm ウ 約36cm
エ 約90cm オ 約400cm

(2) 人工衛星が地球の周りを通る道すじのことを軌道といいます。ISSとひまわり7号が地球を1周するときの軌道の長さの差は、次のように求めることができます。

右の図のように、地球を半径 r km の球、人工衛星の軌道を円とすると、ISSの軌道の半径は $(r+400)$ km、軌道の長さは $2\pi(r+400)$ km となります。ひまわり7号の軌道の長さも同じように考えると、2つの人工衛星の軌道の長さの差は、次のように計算できます。

$$\begin{aligned} & 2\pi(r+35800) - 2\pi(r+400) \\ & = 2\pi r + 2\pi \times 35800 - 2\pi r - 2\pi \times 400 \\ & = 2\pi \times 35800 - 2\pi \times 400 \\ & = 2\pi \times (35800 - 400) \\ & = 2\pi \times 35400 \\ & = 70800\pi \end{aligned}$$

このように、2つの人工衛星の軌道の長さの差は約70800π km であることが分かります。上の□からは、この軌道の長さの差について、さらに分かることがあります。下のア、イの中から正しいものを1つ選びなさい。また、それが正しいこと理由を説明しなさい。

ア 軌道の長さの差は、地球の半径の値によって決まる。
イ 軌道の長さの差は、地球の半径の値に関係なく決まる。

▲全国学力学習状況調査「ISSとひまわり7号」(平成24年)

この問題(2)の全国調査における正答率は 11.8%であり、調査結果から「軌道の長さの

差は地球の半径に関係ある」と考えてしまう生徒が 53.9%いることがわかる。「数学的な結果を事象に即して解釈することを通して、成り立つ事柄を判断し、その理由を数学的な表現を

用いて説明することに課題がある」とまとめられている。今回の授業ではこの問題 (2) の正答率は 45.1%であった。以下が解答類型一覧である。(表 2)

表 2 解答類型一覧

問題番号	解答類型	本校反応率	全国反応率	正答	
(2)	正答の条件 イを選択し、次の(a),(b)いずれかについて記述しているもの (a)軌道の長さの差を求める計算過程で、 r (地球の半径) の項が消去されること (b)軌道の長さを表す式 70800π に、 r (地球の半径) が含まれていないこと				
1	イを 選 択	(a)について記述しているもの。(結論がなくても良い。以下同様)	25.8%	7.8%	◎
2		(a)について計算過程に着目していることについての記述が十分でなく、 r の項が消去されることについて記述しているもの	3.2%	1.0%	○
3		(b)について記述しているもの	12.9%	2.8%	◎
4		(b)について計算結果に着目していることについての記述が十分でなく、 r が含まれていないことについて記述しているもの	3.2%	0.1%	○
5		(a)(b)についての記述はないが、軌道の長さの差や地球の半径に着目して記述しているもの	0.0%	16.2%	
6		選択肢イに当たる事柄のみを記述しているもの	0.0%	0.2%	
7		上記以外の解答、または無解答	32.3%	13.5%	
8		アを選択しているもの	12.9%	53.9%	
9		上記以外の解答	3.2%	0.1%	
0		無解答	6.5%	4.4%	
		正答率	45.1%	11.8%	

(1) r が消去されたことに気づいた (a) の「軌道の長さの差を求める計算過程で、 r (地球の半径) の項が消去されること」を理由としてあげた生徒が 29.0%、(b) の「軌道の長さを表す式 70800π に、 r (地球の半径) が含まれていないこと」を理由としてあげた生徒が 16.1%となった。

解答欄	
正しいものは	正しいこと理由
イ	計算式を見ると $2\pi r$ は、式の途中で消えているから、軌道の長さの差は人工衛星がどのくらい回っているかによって決まる

▲生徒の回答 1

解答欄	
正しいものは	正しいこと理由
イ	答えの 70800π に r はないから関係ない決まっている。

▲生徒の回答 2

今回は計算過程で r の項が消去されることに着目した生徒の方が多くなった。これは授業中に「計算途中で回転半径が消去されること」に着目した説明を丁寧に行った結果ではないかと考える。

(2) ミスコンセプション

アを選択した生徒が 4名 (12.9%) いたが、このうち 3名は理由が無回答で、唯一理由を書いた生徒の説明は以下の通りである。

文字は代入することができますが、決まった数でないと代入できないから、地球の半径によって、軌道の長さの差は決まると思います。

▲生徒の回答 3

この生徒はアと解答した理由を「地球の半径によって決まらないのはおかしい」と事後インタビューで語った。理由は「式の途中で地球の半径を表す r が消去されている。ここで消えてしまっているから軌道の差に当たる 70800π に r は含まれていない。だからおかしい。半径である r に影響されるはずだ。」と答えた。この生徒は式の途中で半径 r が消去されることを読み取っており、さらに計算結果に半径を表す r が含まれていないことも読み取れている。しかしそのことよりも、「軌道の長さの差に地球の半径が影響している」という思い込みを優先している。ここにミスコンセプションをみとることができる。数式が表すものが正しいのではなく、そこに誤りがあると思ったようだ。

6. まとめ

今回の授業実践では「計算過程をふり返り式を読む活動」に焦点を絞って行った。まず回転半径を変えても歩いた道のりの差は変わらないことを数を用いて確かめた。生徒たちはその計算過程をふり返り、数を計算せずにもとの数のまま計算を進めていくことで、回転半径が計算過程で消去されていることに気付いていった。さらに文字を用いて計算し直すことで、計算過程において回転半径 r が消去されることを読みといた。このような授業を行った結果、検証問題においてほぼ半数の生徒が式を読むことが可能であるという結果を得ることができた。また生徒が式を読むにあたって文字を用いて計算の構造を明らかにするこ

との有用性を感じていることも明らかにすることができた。

今後の課題は、残り半数の生徒に対する効果的な手立てについて研究していくことである。その手立てとして、「問題文中の数を計算せず、その数を残したまま計算を進めていくこと」があげられる。「その数がなにを表しているのか」を読み取ることが式を読む活動で重要な意味をもつ以上、より読み取りやすい形で式を書いていくことを意識させる必要がある。また、現実の世界から問題を見出し、数学化して問題解決していく経験を事前に積ませておくことである。式が表すものを読む体験を積み重ねることで、より式を読むことができているのではないか。引き続き探究を進めていきたいと思う。

7. 参考文献

1. 藤井齊亮 (2020) 「算数における子どもの「つまづき」の価値」. 算数授業研究論究.No.130. 東洋館出版社
2. 国立教育政策研究所教育課程研究センター (2014) 平成 24 年度全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学
3. 三輪辰郎(1991)「第 2 章 式の指導内容の概観と問題点の考察」. 『新・中学校数学指導事例講座 2 数・式』. 金子書房
4. 清水宏幸 (2011) 「数学言語を使いこなせ！「文字式」に強くなる！！」明治図書
5. 清水宏幸 (2016) 「問題解決のために構想を立て実践し、評価・改善する力の育成—全国学力・学習状況調査における評価・改善する力を測る問題に焦点を当てて—」. 第 4 回春期研究大会論文集 創成型課題研究の部
6. 杉山吉茂 (1990) 「「式をよむ」ことについて」. 学芸大数学教育研究. 第 2 号