

# 数学的見方・考え方を活用した問題解決型授業とは

## －方程式分野に焦点を当てて－

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 雨宮冬弥

### 1. 研究動機と背景

#### 研究動機

本研究の背景として、筆者の学部時代の経験が関わっている。私は学部時代の実習で中学 1 年生の一次方程式単元の一次方程式の利用を担当した。生徒の実態を見ると配属校が山梨大学附属中学校であったために学力は高い生徒たちであった。一次方程式の文章問題では方程式を利用して解く他に問題によっては鶴亀算などの算術的な方法で解くことができる。実習校の生徒たちは多くが小学生のときに鶴亀算を学習している。そのような経緯があり、方程式の文章問題では鶴亀算などを用いている子どもも多かった。実際に授業をしたところ生徒は一次方程式を用いて解くことができているが、鶴亀算のような算数の知識で解く方が簡単ということを行っている生徒がいたり、方程式で解くことの良さがわからないといった生徒もいた。このような経緯から私は方程式分野における問題解決型授業を研究し、子どもたちに方程式の良さを感じさせられるようにしたいと思い、このような研究テーマにした。

#### 研究背景

平成 29 年告示の学習指導要領（数学編）において「数学的見方・考え方を働かせ」という言葉がキーワードとなっている。「数学的な見方」とは、「事象を数量や図形およびそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」とされている。「数学的な考え方」とは、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識およ

び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」とされている。数学的見方を一次方程式の単元で考えると、問題を解決するために、等しい数量の関係を方程式に表すこと力や作った方程式を形式的に処理することで方程式のよさを理解する力のことであるといえる。また、数学的考え方を同じく一次方程式の分野で考えると、数量の関係を図や表などでわかりやすくしたり、解決の過程を振り返り、他の問題場面で活用可能かどうかを考えることといえる。このように学習指導要領の観点から見ても方程式分野の指導は重要な位置になっているといえる。

平成 20 年度の全国学力・学習状況調査の次の問題が挙げられる。

折り紙を何人かの生徒に配るのに、1 人に 3 枚ずつ配ると 20 枚余ります。また、1 人に 5 枚ずつ配ると 2 枚足りません。

生徒の人数を求めるために、生徒の人数を  $x$  として方程式を作りなさい。ただし、作った方程式を解く必要はありません。

この問題の正答率は 60.5% であり、解答類型と反応率は表 1 の通りである。誤答類型の 2、3、4 の反応率はいずれも 5% 以下である。類型 9 の反応率が 12.1%、類型 0（無解答）の反応率が 18.5% という結果になった。比率が大きい誤答類型は見受けられなかったため、子ども達が方程式のどこでつまづいているかを明らかにすることは難しいと思われる。この問題の解答類型と反応率は表 1 に記載。

表 1 平成 20 年度の解答類型と反応率

	解答類型	反応率 (%)	正答
1	$3x + 20 = 5x - 2$ または $\begin{cases} y = 3x + 20 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$ と解答しているもの (同値な式であればよい。枚数は $y$ と異なる文字で表していてもよい。以下同様。)	60.5	◎
2	$3x - 20 = 5x + 2$ または $\begin{cases} y = 3x - 20 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$ と解答しているもの	4.1	
3	$\frac{1}{3}x + 20 = \frac{1}{5}x + 2$ または $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 20 \\ y = \frac{1}{5}x - 2 \end{cases}$ と解答しているもの	0.2	
4	上記以外の一元一次方程式を解答しているもの	4.7	
9	上記以外の解答	12.1	
0	無解答	18.5	

さらに、この問題に関して平成 21 年度の全国学力・学習状況調査において次の問題が出題されている。

次の問題と考え方を読んで下の  に当てはまる言葉を書きなさい。

**問題**

折り紙を何人かの生徒に配るのに、1 人に 3 枚ずつ配ると 20 枚余ります。また、1 人に 5 枚ずつ配ると 2 枚足りません。

生徒の人数を求めるために、生徒の人数を  $x$  として方程式を作りなさい。

**考え方**

方程式を作るために、 $x$  を使って、上の問題の数量のうち  を 2 通りの式で表すと、 $3x + 5$  と  $5x - 2$  になります。

この 2 つの式が等しいので、方程式は  $3x + 5 = 5x - 2$  です。

この問題の解答類型と反応率は表 2 の通りである。

表 2 平成 21 年度の解答類型と反応率

	解答類型	反応率 (%)	正答
1	「折り紙の枚数」と解答しているもの (枚数と解答しているものを含む。)	36.3	◎
2	「折り紙」と解答しているもの	4.7	
3	「生徒の人数」と解答しているもの (生徒、または人数と解答しているものを含む。)	19.3	
4	「配り方」と解答しているもの	2.3	
9	上記以外の解答	19.5	
0	無解答	17.3	

この問題では  $3x + 5$  と  $5x - 2$  の式が何を表しているかという方程式の立式について出題

している。平成 20 年度の調査では約 6 割の子どもが方程式の文章問題を方程式に立式することができているが、平成 21 年度の調査では正答率が 4 割未満となっており、文字式の意味が読み取れていないということが分かる。

これらの調査により、今の子ども達は方程式を立式する際に数量関係を読み取れずにいるということが分かる。このため、方程式分野における「数学的見方・考え方」は現代の数学教育にとって 1 つの課題であるということがいえる。また、平成 29 年告示の学習指導要領（数学編）では「主体的に問題発見・解決の過程を遂行すること、そして、これを振り返って言語としての数学で表現し、意見の交流や議論などを通して吟味を重ね、更に洗練させていくことが大切であり、ここに数学的活動の教育的意義がある。」と書かれており、数学的活動を含んだ授業開発は必要なことであるといえる。

## 2. 研究目的

本研究の目的は大きく分けて 2 つある。

1 つ目は先の研究背景で述べたように方程式の立式が子ども達にとってどのような困難になっているかを明らかにすることである。子ども達が方程式のよさを実感するためには困難性の解決が必要であるためこのような目的にした。

2 つ目は明らかになった困難性を解決するための指導法を追求することである。困難性の所在が分かれば、困難性を改善するための手立てが必要となる。その手立てを踏まえた数学的活動を考え、指導法として考えて行く。

## 3. 先行研究

### （1）方程式の困難性について

三輪（1991）は方程式の文章問題の困難性について「方程式の学習において、方程式が解けるようになることと方程式の意味を知ることが重要なことであるが、それらを用いて応用問題を解くことも重要なことである。」と方程式を応用することの重要性について述べてい

る。また、方程式の応用問題として一般的な文章問題は次の順序で解決されるとも述べている。

○文章問題を方程式で解く過程

①問題から方程式を作る。

②作った方程式を解く。

③方程式の解を吟味・検討する。

この中で子どもが最も困難と感じるものは①問題から方程式を作る過程であると述べている。このことから、方程式の困難性の所在は立式にあると見ることができる。

生徒たちが方程式の立式に困難性を感じていることは分かったが、なぜ方程式の立式が困難であるのかは分かっていない。先ほど紹介した平成 20 年度の全国学力・学習状況調査の結果においても、反応率が大きい誤答類型は特に見当たらない。しかし、平成 21 年度の全国学力・学習状況調査での正答率はかなり低い値になっているため、さらなる調査をしていく。

### （2）文字式の理解について

Kuchemann(1981)は、子どもが文字に対してどのような意味を与えているのか次の様に述べている。

①未知数としての文字

②一般の数を表す文字

③変数としての文字

④数値化された文字

⑤使わない文字

⑥対象物としての文字

この中で④、⑤、⑥は数学本来の文字の意味ではない。④は文字なにかの数字を意味していると捉えてしまっている。⑤は文字は計算などには使わないものという捉え方をしている。⑥は物を簡略化した記号、あるいは、物そのものの記号というように捉えている。。

### （3）子どもの文字式に対する理解

Kuchemann(1981)が提案している⑥の物としての文字以外の理解がある。それは、次の 3 つである。

①問題文の言葉を置き換えている物としての文字

②数値を置き換えている

③物そのものを置き換えた文字

また、清水 (2017) は子どもの文字式に対する理解を次のように述べている。子ども達はこのような文字の理解をしているため、平成 20 年度全国学力・学習状況調査の問題を例にとると  $3x + 20$  を「3 枚ずつ 1 人に配ると 20 枚余る」という様に読み取っており、 $3x$  は人数を表し、20 は枚数を表すといった様に別々の数量を表す式と捉えていたり、生徒の人数  $x$  を使った式は生徒の人数を表していると捉えたりすると考えられる。

#### 4. 研究方法

以上の先行研究を踏まえて、本研究は以下のように進めた。

- (1) 実習校における事前調査①
- (2) 実習校における事前調査②
- (3) 授業実践
- (4) 実習校における事後調査

#### 5. 実践結果

##### (1) 事前調査①

###### I 調査の内容

実習校において一次方程式について実態を調べるために事前調査を実施した。平成 20 年度全国学力・学習状況調査を参考に解答類型を作り、誤答を調査することによって、困難性の所在を明らかにすることをねらいとした。

###### II 調査対象、方法

- i 対象: 山梨県内公立 A 中学校 3 年生 73 名
- ii 実施時期: 令和 2 年 7 月中旬
- iii 方法: A4 の問題用紙 1 枚に一次方程式の利用の問題を 1 問載せたものを、朝の会の前に 10 分時間をいただき質問紙調査を行った。
- iv 調査問題

あめを何人かの生徒に配るのに、1 人に 3 個ずつ配ると 21 個余ります。また、1 人に 5 個ずつ配ると 63 個足りません。生徒の人数とあめの数を求めなさい。

##### v 調査問題について

問題は平成 20 年度全国学力・学習状況調査の問題の数値を変えたものにした。今回の調査では、立式を問うだけでなく、方程式を解いて答えを出すところまでを解答させた。これには調査対象校の学習実態を調べることも視野に入れていたため、方程式の解き方なども調査問題に書かせ、調査の対象とした。

##### III 事前調査①の結果

問題の正答率と問題場面から立式した式を解答類型を作り、分類していくことにした。

表 3 実態調査①立式の結果

	解答類型	反応率
1	$3x + 21 = 5x - 63$ または、この両辺を含む連立方程式として立式しているもの。	54 人 74.0%
2	$3x - 21 = 5x + 63$ または、この両辺を含む連立方程式として立式しているもの。	1 人 1.3%
3	$\frac{1}{3}x - 21 = \frac{1}{5}x + 63$ または、この両辺を含む連立方程式として立式しているもの。	0 人 0%
4	上記以外の一元一次方程式または、連立方程式を立式して解答しているもの。	4 人 5.5%
5	$3x + 21$ または $5x - 63$ と解答しているもの。	3 人 4.1%
9	上記以外の解答	12 人 16.4%
0	無解答	0 人 0%

事前調査①の正答率は 44 人 (60.3%) であり、全国平均とほとんど変わらない値になった(平成 20 年度全国学力・学習状況調査と比較)。立式の反応率を見てみると、誤答類型 2, 3, 4 はほとんど見られず、調査した学校では立式をすること自体はできないということはないように思われる。立式はできているが方程式の解が正しくなかったり、代入ができなかったりする生徒が 10 人 (13.4%) いた。

この調査の結果では、子どもの方程式の立式をどのように考えているのか見い出せないと考えたため、次の実態調査②を同じく A 中学校の 2 年生で実施することにした。

## (2) 事前調査②

### I 調査の内容

事前調査①では、生徒が方程式の立式をどのように考えているのか見い出すことができなかった。そのため本調査では事前調査①に設問を追加し、生徒がどのように立式について考えているのか調査することにした。

### II 調査対象、方法

- i 対象：山梨県内公立 A 中学校 2 年生 61 名
- ii 実施時期：令和 2 年 7 月下旬
- iii 方法：A4 の問題用紙 1 枚に一次方程式の利用の問題を 1 問と裏にどのように立式をしたのかを問う問題を載せたものを、朝の会の前に 15 分時間を用いて質問紙調査を行った。
- iv 調査問題：事前調査①の問題に加えて以下の問題を追加して調査を行った。表 7 分、裏 8 分と時間を区切り、表を解いている時間は裏を見ないように指示を出した。

#### 問題

あめを何人かの生徒に配るのに、1 人に 3 個ずつ配ると 21 個余ります。また、1 人に 5 個ずつ配ると 63 個足りません。

生徒の人数とあめの個数を求めなさい。

#### 設問

この問題を A さんは生徒の数を次のように求めました。

生徒の人数を  $x$  人とする

$$3x + 21 = 5x - 63$$

$$3x - 5x = -63 - 21$$

$$-2x = -84$$

$$x = 42$$

この解き方を見て、 $3x + 21$  と  $5x - 63$  は何を表しているのか答えてください。

### v 調査問題について

この調査では、方程式の文章問題を解いた後に、同じ問題の立式から方程式の解を出すところまでを提示し、立式されている方程式

の左辺と右辺は何を表しているのかを問うことによって、数量関係の把握や文字式の理解がなされているのかを調査した。

### III 事前調査②の結果

表 4 表の文章問題の立式の反応率

	解答類型	反応率
1	$3x + 21 = 5x - 63$ または、この両辺を含む連立方程式として立式しているもの。	44 人 72.1%
2	$3x - 21 = 5x + 63$ または、この両辺を含む連立方程式として立式しているもの。	0 人 0%
3	$\frac{1}{3}x - 21 = \frac{1}{5}x + 63$ または、この両辺を含む連立方程式として立式しているもの。	0 人 0%
4	上記以外の一元一次方程式または、連立方程式を立式して解答しているもの。	7 人 11.5%
5	$3x + 21$ または $5x - 63$ と解答しているもの。	0 人 0%
9	上記以外の解答	10 人 16.4%
0	無解答	0 人 0%

表 5 裏の設問の反応率

	解答類型	反応率
1	あめの個数	15 人 24.6%
2	生徒の人数	1 人 1.18%
3	$3x+21$ は 3 個を $x$ 人に配り、21 個余った。 $5x-63$ は 5 個を $x$ 人に配り、63 個足りなかった。	39 人 63.9%
0	その他	6 人 9.8%

表の文章問題の正答率は 34 人 (55.7%) であり、全国平均より少し下回る形となった。これは、対象が中学 2 年生であったこともあり、3 年生と比較したときに習熟度の差は出てしまうと考えたため、特に重要視することはな

いことにした。反応率の方は事前調査①の時と同じく、誤答類型2, 3, 4の数値が低い値となった。

裏の調査では「あめの個数」と答えた生徒は15人(24.6%)でかなり低い数値となった。一番高い反応率を示したのは、解答類型3の「 $3x+21$ は3個を $x$ 人に配り、21個余った。 $5x-63$ は5個を $x$ 人に配り、63個足りなかった。」であった。このことから多くの生徒は方程式の右辺と左辺「あめの個数」と考えているのではなく、解答類型3のように文章問題に書かれてあった様子をそのまま文字式にして方程式を立式しているのではないかと考えた。

### ○事前調査の考察

生徒達が立式自体はできていることがわかったが、多くの生徒は立式した式の意味を問題文の流れを式に表すというように考えることが分かった。立式自体をすることは問題のやり方を覚えることでできることである。しかし、これでは数量関係を考えることはできないことに加え、2つの数量を1つの方程式にまとめ、形式的に処理することができる方程式のよさを感じることができないと考えた。よって、次の実践授業では数量関係の把握と立式した方程式の中の文字式の意味を理解させていくことが必要になるであろうと考えた。

### (3) 授業実践

#### I 実践の内容

授業のねらいとしては、問題の数量関係を丁寧に考えることで、立式することができる方程式が何を意味しているのかを生徒と対話したり、数量関係を図を用いて表すことで視覚的に理解したりすることである。また取り上げる題材はこれまで挙げてきていた過不足のある一次方程式の問題とする。

#### II 調査対象、方法

i 対象：山梨県内公立A中学校1年生

ii 実施時期：令和2年10月下旬

iii 題材

以下の問題を取り上げる。

Aさんは地域のごみ拾いのお礼として子ども達にお菓子を配りました。1人に4個ずつ配ったら9個足りませんでした。子ども達に1人に3個ずつ配ったら15個余りました。子どもの人数とお菓

子の個数はそれぞれいくつだったでしょう。

#### iv 授業の概要

本授業は2時間構成で授業を行った。1時間目は「子どもの人数を $x$ 」としたときの解き方を行った。内容としては、数量関係の把握に線分図を用いた。そこから出てきた等しい数量関係を言葉で方程式に表す活動を行い、作られた言葉の式に文字や数を当てはめることによって方程式を立式した。2時間目では「お菓子の個数を $x$ 」としたときの解き方を行った。こちらでは数量関係の把握については図や表などは用いず、言葉の式を作る活動だけをしてから方程式を立式した。

#### v 授業実践の結果

・ $x$ は何を表しているかについて

まず、ほとんどの生徒は方程式を作る前に何を $x$ とすれば良いのかという点については理解できていた。このため、立式の際には $x$ が1時間目では「子どもの人数」、2時間目では「お菓子の個数」という認識がなされていたといえる。

・図の有効性について

授業を進めていく中で、多くの生徒は最初立式ができていなかった。しかし、1時間目では線分図を生徒たちと一緒に作ったところ、多くの生徒に「等しい数量関係」を認識させることができた。しかし、2時間目では線分図を用いなかったためか1時間目と同じ問題にも関わらず、立式に難しさを感じている様子が見られた。このことから、数量関係を把握することに関しては、図や表などの視覚化できるツールを用いることが重要であることが分かった。

・学習感想より

学習感想では、「方程式を解くことはできるが、方程式を作ることは難しい」という感想が

見受けられた。このことから、数量関係の理解に重要視しすぎてしまっていたことがかえって混乱を招いてしまったとも考えることができる。また、生徒にとっては問題を解くことが優先されており、事前調査①の解答類型3のように問題文の流れをそのまま方程式にしたり、式を覚えてしまった方が簡単と考えていたりするのではないかと思う。これらの感想から、生徒にとって数量関係を考えて立式することはとても困難であるため、授業においては発問の組み立てをより綿密に計画立てることで、生徒が1つ1つ気付くことができる様な問題解決を行っていくべきであることがわかった。

#### (4) 事後調査

##### I 調査の内容

調査の内容は事前調査②と同じ形式で行った。授業実践によって事前調査と事後調査の比較を行うことで授業実践の成果と課題を見いだすことを目的としている。また調査時期については、実践授業のすぐ後ではなく、習熟度を見るために期末テストが終了した後の12月に行った。

##### II 調査対象、方法

i 対象: 山梨県内公立 A 中学校1年生 61名

ii 実施時期: 令和2年12月中旬

iii 方法: A4の問題用紙1枚に一次方程式の利用の問題を1問と裏にどのように立式をしたのかを問う問題を載せたものを、朝の会の前に15分時間を用い、質問紙調査を行った。

iv 査問題: 問題は事前調査②と同じものを使用する。また、今回の調査では設問の聞き方を「何を表しているのか」から「どのような数量を表しているか」に変更した。

##### v 調査問題について

今回の調査では立式された方程式に対して生徒たちがどのような意味で捉えているのかをより細かく調査するために解答類型を事前調査②よりも多く設定した。

##### III 事後調査の結果

	解答類型	反応率
1	あめの数	18人

		29.5%
2	生徒の人数	4人 6.6%
3	全員に配りきれぬあめの数	2人 3.3%
4	あめの個数と生徒の人数	2人 3.3%
5	1人に配るあめの個数	2人 3.3%
6	$3x+21$ は3個をx人に配り、21個余った。 $5x-63$ は5個をx人に配り、63個足りなかった。	25人 41.0%
7	その他・無答	6人 9.8%

事後調査の表の文章問題の正答率は25人(41.0%)であった。全戸平均と比べると大きく下回ってしまっている。生徒にとってこの問題が難しいと感じられているように捉えることができた。教材の改善が必要であることがわかった。また、誤答の中には立式はできているにもかかわらず、方程式の解をそのままを答えとしていたり、代入を誤っていたものがあつた。これらの要因としては、問題把握がなされていないことや立てた方程式の意味がわかっていないことが考えられる。

裏の立式された方程式が表している問題では、事前調査の結果よりわずかに「あめの数」と答えた生徒は多くあつた。それにとまって解答類型6の「 $3x+21$ は3個をx人に配り、21個余った。 $5x-63$ は5個をx人に配り、63個足りなかった。」を解答した生徒も減少していた。しかし、まだ一番高い数値となっている。ここに授業実践の成果がわずかに現れていることが分かるが、課題の根本的な解決にまでは至っていないといえる。他の解答類型はどれも低い値となっていることがわかる。

#### 6. 研究のまとめ

本研究の目的は、1方程式の立式に対する困難性の所在を明らかにすること、2困難性を

解決する指導方法を考察することであった。

## 1. 方程式の立式に対する困難性の所在について

方程式の立式の困難性を調査するために事前調査①、②を行った。ここでは多くの子ども達は方程式を立式する際に問題に書かれてあることを文字式化して方程式にしていることが分かった。このような生徒の中には  $3x+21$  や  $5x-63$  といった文字式を「あめの個数」と本来は捉えられているが「 $3x+21$  は 3 個を  $x$  人に配り、21 個余った。 $5x-63$  は 5 個を  $x$  人に配り、63 個足りなかった。」という解釈の方が問題を解く上では簡単だからという考えもあると考えられる。この部分はインタビュー調査を実施してさらに焦点化した調査が必要であると考えられる。このことから、生徒たちは未知の方程式を利用する問題に遭遇したときに立式がうまくできなくなってしまう、方程式の立式が難しいと感じてしまっていることが明らかになった。

## 2. 方程式の困難性を解決する指導方法について

上の 1 のことを踏まえて実践授業を行ったところ、立式の際の数量関係の把握において図など視覚化できるものを用いることによって、等しい数量関係の理解がなされることがわかった。1 でも言ったように生徒たちは文章から式を立てることなどの見える物から方程式を立式することは難しいと感じないのではないかということが分かった。このため目に見えない問題の数量関係を視覚化することによって数量関係の把握はなされることが明らかになった。今回の題材では過不足のある問題であったため、線分図が有効であると予想し、それを用いて授業を行った。では、教科書に載っている他の「個数と代金」「速さ」の文章問題には視覚化したどのような教具が必要なのかを今後は研究していく必要があると思う。

### 引用・参考文献

・国立教育政策研究所 (2008) 全国学力・学習

状況調査 中学校報告書

・国立教育政策研究所 (2009) 全国学力・学習状況調査 中学校報告書

文部科学省 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説 数学編 日本文教出版

・清水宏幸 (2017) 中学校数学における文字式の理解に関する研究 日本数学教育学会誌 題 99 巻

・清水宏幸 (2019) 中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究 日本数学教育学会誌 第 101 巻 第 7 号

・清水宏幸 (2019) 文字式とその式における文字の理解に関する研究 日本数学教育学会誌 101 巻

第 11 号

・杜威 (1991) 文字式の学習に関する研究 杜威 東洋館出版