

中学校数学における「関数の考え」の育成を目指した授業実践

—依存関係に着目して—

教育学研究科 教育実践創成専攻 教科領域実践開発コース 中等教科教育分野 中井敬吾

1. 問題の所在と研究の目的

数学は、現実世界と深く関わっている教科であるが、数学と現実世界が関わっていることを実感している生徒は少ないということが、全国学力学習状況調査の結果からもわかっている。そこで、数学が日常に生かせることを実感し、実際に生かそうとすることができる生徒を育成したいと考える。本研究では、関数領域に焦点を当てる。なぜなら、関数は、求めたい数量に対して、何か都合のいい数量に置き換えて、その 2 つの数量の間で成り立つ関係を明確にすることで、求めたい数量について推測するために使われるからである。しかし、清水(2006)は、「数学の授業では、1 次関数そのものを学習することが中心となり、数学が日常の事象とつながりを持っていることを生徒たちに実感させることが難しい」と述べており、関数領域で数学と日常事象とつながりを持たせることの困難性は従来から言われてきている。また、中島(1981)は、「算数や数学の指導に関して「関数」を重視する場合に、 $y=3x$ とか $y=3x+5$ とかいう「関数」を、指導内容として理解させることに重点をおくのだということもまったく否定することはできないが、むしろ、「関数という関係的な見方をとり入れて、ことがらを考察しようとするアイデアやその手法を子どもに身につけさせるとともに、数学教育を、時代の進展に即応して、より有効なものにする上にも活用しよう」ということに、その重点があるといつてよい。」というように述べており、関係的な見方をとり入れて、ことがらを考察しようとするアイデアやその手法を身につけさせることが大切であると考え。このような考えを「関数の考え」と一般的に呼んでおり、主に小学校の算数

で指導されてきている。もちろん中学校においても、この「関数の考え」が大切であると考えるが、中島や清水が述べているように、特定の関数そのものを教えることが中学校では重視されているように感じる。学習指導要領においても、「関数の考え」という言葉は、小学校算数科では載っているが、中学校数学科では載っておらず、指導する側も意識的に指導していくことが大切であると考え。そのため、この「関数の考え」の育成を目指した授業実践をおこなっていきたいと考えた。

以上より、本研究の目的は、「関数の考え」の育成について考察し、その育成を目指した教材を開発し、授業実践していくこととする。

2. 研究の方法

研究の目的を達成するために、次の方法で研究を進めていくこととした。

- ① 「関数の考え」について考察している文献を参考に、「関数の考え」の育成について示唆を得る。
- ② 「関数の考え」の育成を重視した教材研究を行い、学習指導の提案をする。
- ③ 提案した学習指導を実践・分析し、「関数の考え」の育成につながる実践であったか、成果と課題を明確にして考察する。

3. 「関数の考え」について

「関数の考え」は、問題解決において、次の三つの思考過程を経るとされている(『新編算数科教育研究』(2010))。

(ア) まず、ある数量について、他のどんな数量と関係づけられるか、その数量をきめればきまるか、その数量に伴って変化するか、というような見方に立って、数量を考

察していくこと。

(イ)次に、伴って変わる二つの数量について対応や変化の特徴を明らかにすることへ進む。対応や変化の特徴をとらえるには、変量の間の関係を表やグラフに表したり、式に表したり、式からよみとったりすることが必要になること。

(ウ)こうして、伴って変わる二つの数量の間の対応や変化の特徴が明らかになったら、その特徴をはじめの問題の解決に利用すること。

以上の三つの過程を簡潔に表すと、(ア)依存関係を考察する(イ)関数関係を見つける(ウ)関数関係を利用すると表せることが読み取れる。どの過程も大切であると考えるが、本研究では、特に(ア)の過程に着目したいと考える。なぜなら、関数の単元の問題では、あらかじめ求めたい数量に対して、関係のある数量が与えられている場合が多いと感じるからである。これでは、与えられた問題を解くことはできるが、日常生活に潜んでいる問題に対しては、自ら関係のある数量を見つけて解決することを困難に感じるのではないかと考える。そして、日常生活においてどのように数学が生かせるかつながりが持てず、数学が日常とつながっていることを実感しづらくなってしまっているのではないかと考える。

4. 本時の授業について

(1)単元：「1次関数」

(2)対象校・対象生徒

実習校である山梨県内公立中学校・第2学年生徒(33名)

(3)日時：令和2年12月10日(木) 5校時

令和2年12月17日(木) 3校時

(4)題材名：「ビッグとワイドどちらの「コロコロ」が長持ちするか」

(5)教材について

依存関係を考察する過程を入れた授業にするために、求めたい数量を直接調べることが困難である課題を設定する。この問題では、2つの「コロコロ」のどちらが長持ちするか比べ

る生徒にとって身近な課題であるが、実際に比べるのは、面積の大きさとしている。なぜなら、粘着する部分全体にゴミが付着したら、1枚破いて捨てるため、長持ちするということは、「コロコロ」を全部広げたときの面積が大きいということであると考えられるからである。全部広げたときの面積は、全部広げれば求められるが、実際に広げて面積を比べると、使い物にならなくなってしまったので、広げないで面積を求めて、比べる方法を考える。全部広げると、縦の長さが非常に大きい縦長の長方形となり、横にあたる長さはわかっているの、全体の縦の長さがわかればよい。そして、全体の縦の長さを求めるために、1枚1枚の縦の長さがわかればよい。この問題では、1枚の縦の長さに伴って変わる数量はどのような数量か、具体物を観察することで考えることができる。「コロコロ」は巻かれているので、1巻き目の縦の長さと50巻き目の縦の長さが異なる。これは、広げたときの縦の長さが、巻かれている状態の円周にあたるからである。紙には厚さがあるため、紙の厚さ分だけ外側の円の半径が長くなり、外側にいくにつれて円周が大きくなる。そのため、(紙1枚の面積) $\times$ (巻き数)という単純な計算では求められないようになっている。1枚の縦の長さを求めるときに、巻き目に伴って円周(縦の長さ)が変化する関係に気づくことが解決には必要になる。このときの巻き目と円周の関係は、(円周) $=2\pi \times \{(\text{巻芯の半径})+(1\text{枚の紙の厚さ}) \times (\text{巻き目})\}$ となる。巻芯の半径と1枚の紙の厚さは定数なので、円周は巻き目の1次関数になっている。そのため、縦の長さは1巻き目から一定に長くなることがわかり、1枚1枚の縦の長さを測らなくても巻き目における縦の長さを求めることができる。

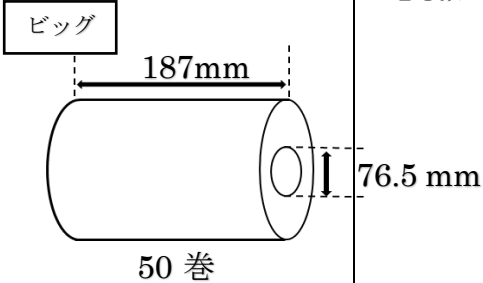
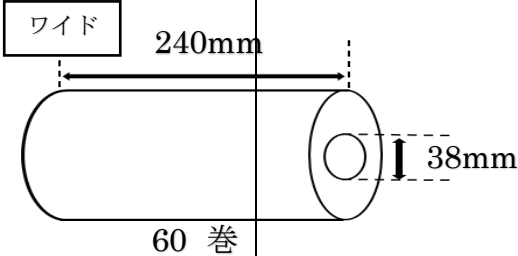
表1 パッケージに書かれているそれぞれの数値

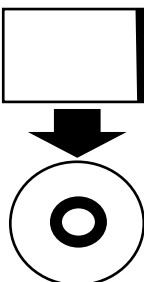
	ビッグ	ワイド
巻き数	50巻き	60巻き
幅	187mm	240mm
巻芯内径	76.5mm	38mm

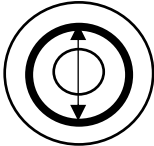
(6)本時のねらい

- 様々な角度から「コロコロ」の面積を求めようとすることができる。(関心・意欲・態度)
- 1巻きの面積と巻き目の関係に着目することで、「コロコロ」の粘着する部分の総面積を求めることができる。(数学的な見方・考え方)
- 数量関係を正しく見ることができ、定規を使って長さを測り、面積を求める計算をすることができる。(数学的な技能)
- 「コロコロ」の粘着する部分の面積を求め方を振り返り、1枚の円周は巻き目の1次関数であることを理解することができる。(数量・図形などについての知識・理解)

(7)実際の授業展開

過程	指導内容及び活動内容	予想される生徒の反応	指導上の留意点
導入 10分	○課題を把握する。 先生は、掃除のときによく「コロコロ」を使っていて、この前使い切ってしまいました。いつものように「コロコロ」を買いに行こうとすると、先生がいつも使っているノーマルの「コロコロ」よりもたくさん使えそうな、ビッグとワイドの2種類の「コロコロ」がありました。どちらもノーマルの「コロコロ」よりも長持ちしそうです。しかし、ビッグとワイドでは、どちらが長持ちするのかわかりません。どちらがより長持ちするでしょうか。		・実際のコロコロを見せる。
	・二つの「コロコロ」はどのような違いがあるか。 ビッグ  50 巻 ・長持ちするとはどういうことか。 ・どちらの「コロコロ」の面積が大きいだろうか。 ・どうしてそのように考えたか？	・芯の大きさ ・空洞の大きさ ・幅 ・巻き数 ワイド  60 巻 ・巻き数が多い ・くっつく面積の合計が大きい ・ワイド ・ビッグ ・幅と巻き数の2つの数値がワイドの方が大きいから。 ・巻芯内径が約2倍もビッグの方が大きいから。	・パッケージに書かれている数量と言葉の意味を確認する。 ・1枚捨てるタイミングは、紙一面にゴミが付着していたらであると統一し、広げたときの総面積が大きい方が長持ちする考えることを確認する。 ・手を挙げて人数を確認する。 ・予想の根拠を問い、どの数量が面積に影響するのか考えるきっかけをつくる。

展開 35 分	○課題の再提示		・幅、巻き数、巻芯内径が全て違うことから、それぞれの面積を求めていくことにする。 ・授業で使ったものはその後に使いたないので、広げないで求められる方法を考えてほしいことを伝える。
	広げないで「コロコロ」の面積を求めてみよう！		
(5 分)	○自分で解決の見通しを立てる。	・(円柱と見た底面の円の直径から)1 巻きあたりの面積を求めて、それに巻き数をかける。 ・1 巻きの面積が全部違うんじゃないか。	・ワークシートを配る。(考えたことは消さないように伝える。) ・ビッグとワイドを 10 セット配り、回すようにする。
(10 分)	○見通しを発表させる。	・広げたときの体積と円柱と見たときの体積の関係で長さを求める。	・1 巻きの面積が全部違うんじゃないかという考えが出てきた場合、今回は、1 巻きの面積を同じと仮定して、1 巻きあたりの面積×巻き数で全体の面積を求めていくことを確認する。
(20 分)	○ビッグとワイドを広げたときの粘着する部分の面積を求める。	・1 巻きの面積×巻き数 ワイド： $5.2\pi \times 24 \times 60=7488\pi(\text{cm}^2)$ = $23512.32(\text{cm}^2)$ ビッグ： $8.8\pi \times 18.7 \times 50=8228\pi(\text{cm}^2)$ = $26024.32(\text{cm}^2)$ ・広げたときの体積と円柱と見たときの体積の関係で長さを求める。	・電卓を使っていいが、計算をワークシートに書き残しておくように伝える。 ・長さを測っている生徒がいた場合、全体で共通の長さにする。(円柱と見た底面の円の外側から外側までの長さ、紙の厚さ)
まとめ 5 分	○個人での振り返り		・学習感想を記入する。
ここから第 2 時			
導入 5 分	○課題を振り返る。		・ビッグの方が面積が大きそうであったことを確認する。
	ビッグとワイドどちらの「コロコロ」が長持ちするか それぞれ面積を求めて比べてみよう！		
展開 40 分 (15 分)	○発表 	・1 巻きの面積×巻き数 ビッグ： $76.5\pi \times 187 \times 50=715275\pi(\text{mm}^2)$ = $2245963.5(\text{mm}^2)$ = $22459.635(\text{cm}^2)$ ワイド： $38\pi \times 240 \times 60=547200\pi(\text{mm}^2)$ = $1718208(\text{mm}^2)$	・縦の長さは、円周と等しく、直径の長さによって決まることを確認する。 ・全部広げた長さを求め、どれぐらいの長さになると考えられるか把握する。 ・紙には厚さがあるので、巻き目

(25 分)	○全体での振り返り ・1 枚の面積がどのように変化しているか、1 枚の縦の長さに注目して変化を見てみよう。  ・x 巻き目のときの円周を ymm とすると、どのような式になるか？ ・1 枚の紙の縦の長さ x と巻き目の関係はどのような関係であるか？ ・ビッグの場合、x 巻き目のときの縦の長さを ymm とすると、どのような式になるか？ ・実物の「コロコロ」の最初の 1 枚と最後の 1 枚を見せる。	=17182.08(cm²) ・1 巻きごとに面積が変わっていると考える。 ・紙 1 枚の縦の長さを ymm とし、紙の厚さを 0.1mm とすると、 1 巻き目 : $y=(38+0.2)\pi=38.2\pi$ (mm) 2 巻き目 : $y=(38+0.4)\pi=38.4\pi$ (mm) 3 巻き目 : $y=(38+0.6)\pi=38.6\pi$ (mm) … 60 巻き目 : $y=(38+0.2\times 60)\pi=50\pi$ (mm) - x 巻き目 : $y=(38+0.2x)\pi=0.2\pi x+38\pi$ ・1 枚の紙の縦の長さは巻き目の 1 次関数である。 - x 巻き目 : $y=0.2\pi x+76.5\pi$	が増えると、1 枚の面積が大きくなると考えた生徒がいることを共有する。 ・数値が簡単なワイドをもとに考えていく。 ・1 巻き目から 60 巻きの長さをたすと、全部広げたときの長さになることを確認する。 ・全部足し合わせていくのは大変だが、高校で、簡単に計算する方法を学んでいくことを伝える。 ・60 巻き目の求め方をもとに式を立てるように促す。 ・式をもとに関係を捉えさせる。 ・「コロコロ」にも 1 次関数の関係が潜んでいたことを確認する。 ・同じ会社の製品であり、同じ材質なので、紙の厚さは、ビッグもワイドも同じであることを確認する。 ・ビッグとワイドの 1 枚の違いと最初と最後の 1 枚の違いを、実物を使って確認し、実際にどれだけ違うのか目で見えるようにする。
まとめ 5 分	○個人で振り返りをする。		・学習感想を記入する。

6. 授業の実際

<1 時間目>

問題を把握する

本授業では、問題解決する必要性を持たせるために、「長持ちする」という言葉を使った。「コロコロ」を使った生徒もいないと考えられるため、生徒に「コロコロ」を使う場面を実演してもらい、ゴミが一面に付着したら 1 枚破って捨てるということを全体で確認した。

その後、「長持ちする」ことを「面積を求める」ことで問題解決しようということを確認した。
予想を立てる

今回の問題は、広げたときの想定をしにくい問題なので、「今の段階で、ビッグとワイドどちらの方が面積が大きいですか？」と発問し、予想を立てさせた。実際は、ビッグの方が面積が大きいが、ビッグを選んだのが 3 人、ワイドを選んだ生徒が 27 人であった(同

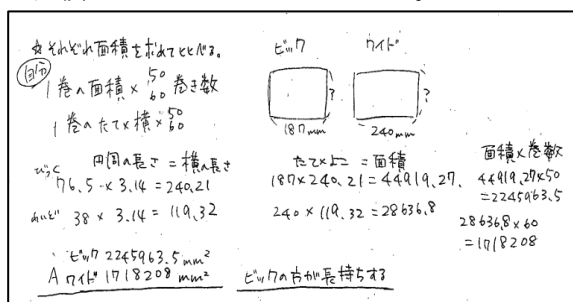
じ、わからないで手を挙げる生徒はいなかった)。さらに、予想の理由も発表させた。ビッグを選んだ生徒は、「芯の大きさが大きいから」、ワイドを選んだ生徒は、「芯は小さいけど、幅が大きくて巻き数が多いから」と発言をしていた。多くの生徒は、数値が大きい数量がビッグよりも 2 つ多いから、ワイドの方が面積が大きいと考えていることがわかる。

解決の見通しを立てる

実物のビッグとワイドの「コロコロ」を配り、面積の求め方の見通しを立てさせた。その結果、「1 枚の面積を求め、(1 枚の面積)×(巻き数)=(全体の面積)」という式から、全体の面積を求める」という考えだけが生徒から出た。ここでは、1 枚の面積が内側と外側で違うのではないかという考えは出てこなかったが、そう思っているにもかかわらず発言しなかった生徒が若干名いたことに、自力解決が始まって机間巡視をしているときに気づいた。

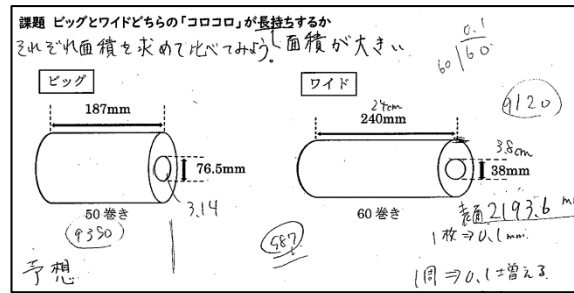
自力解決する

紙の厚さを無視した考えと、紙の厚さを考慮した考えの大きく 2 つの考え方で面積を求めている生徒の姿が見られた。具体的な人数は、紙の厚さを無視した生徒が 16 人で、紙の厚さを考慮しようとした生徒が 17 人であると、生徒のワークシートと学習感想から読み取った。生徒 A のように紙の厚さを無視した考えで解決した生徒は、ビッグとワイドそれぞれの面積を求めることができていた。



生徒 A のワークシート(1 時間目)

生徒 B のように紙の厚さを考慮した考えで解決した生徒は、紙の厚さの分だけ面積が大きくなることはわかっていたが、ビッグとワイドそれぞれの面積を求めることができていなかった。

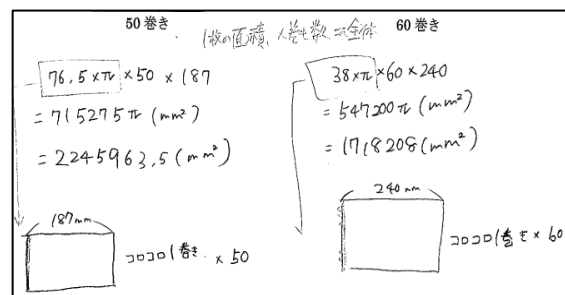


生徒 B のワークシート(1 時間目)

<2 時間目>

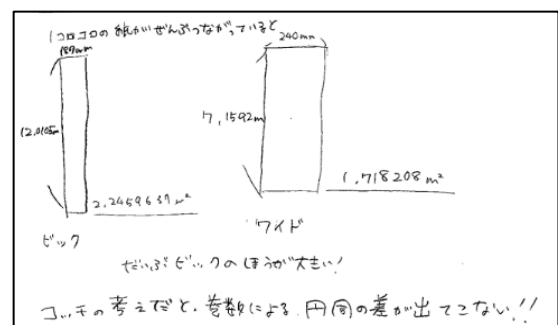
発表と振り返り(紙の厚さを無視した考え)

まず、ビッグとワイドのそれぞれの面積を求めることができていた紙の厚さを無視した考えを発表してもらい、ビッグの方が面積が大きそうであることを全体で共有した。



生徒 C のワークシート(2 時間目)

その後、面積だと実際の大きさが想像つきにくいことから、全体の縦の長さを求める計算をし、全体の縦の長さの違いに着目させた。



生徒 C のワークシート(2 時間目)

振り返り(紙の厚さを考慮した考え)

1 時間目の自力解決で、紙の厚さの分だけ 1 枚の円周が大きくなることに気づいた生徒 D に発表してもらい、紙の厚さを考慮した考えで全体の縦の長さの求め方を深めることをお

1 枚 1 枚を巻いていくことによって、つつの大きさが変わってくるのではないかと思います。

生徒 D の学習感想(1 時間目)

こなった。

紙の厚さは、1 時間目で実際に紙の厚さを測っていた生徒 B を指名し、紙の厚さを 0.1mm と仮定して全体の縦の長さ(円周の総和)の求め方についてクラス全体で考えた。1 巻き目の円周、2 巻き目の円周、3 巻き目の円周を求めた後に、60 巻き目の円周を求めさせた。そして 1 巻き目から 60 巻き目の円周の長さの総和が全体の縦の長さになることを確認した。さらに、ワイドでは、厚さを考慮した全体の縦の長さが厚さを無視した全体の縦の長さよりも約 1m 大きいことについても触れた。

★厚さがあるから、1枚あたりの円周が違っていき、a2ではないか！

厚さを0.1mmとし、紙1枚あたりの円周を求めよう。

ワイド

1 巻き目 $(38+0.2) \times \pi = 38.2\pi$	
2 巻き目 $(38+0.4) \times \pi = 38.4\pi$	
3 巻き目 $(38+0.6) \times \pi = 38.6\pi$	
...	
60 巻き目 $(38+0.2 \times 60) \times \pi = 50\pi$	

合計 $264.6\pi \text{ mm}$
 $= 8308.4 \text{ mm}$
 $= 830.84 \text{ cm}$
 $= 8.308 \text{ m}$

生徒 A のワークシート(2 時間目)

面積の求め方がわかったら、次に 1 枚の円周の求め方に規則がなかったかを考えさせるために、x 巻き目のときの円周を ymm とすると、どんな式で表せそうなのか考えさせた。

★ワイドにある2は？

x 巻き目のとき、円周が ymm

$$(38 + 0.2x)\pi = y$$
$$y = 0.2\pi x + 38\pi$$

(変換数に？)

生徒 E のワークシート(2 時間目)

式変形していくと、 $y=ax+b$ の形で表され、1 枚の円周は巻き目の 1 次関数であるということを全体で共有した。そして、ビッグについても同じ会社が作っている商品で同じ素材であるため、紙の厚さは同じと考えられることから、「38」のところが「76.5」になるだけであることに気づかせることができた。

ビッグ

ワイド $y = 0.2\pi x + 38\pi$

↓

ビッグ $y = 0.2\pi x + 76.5\pi$

厚さはワイドとビッグ
同じ値と考える！(同じ会社だから)

厚さを考えると、1次関数の関係があった！

生徒 E のワークシート(2 時間目)

実物の「コロコロ」の最初の 1 枚と最後の 1 枚を見せる。

ビッグとワイドの最初の 1 枚と最後の 1 枚の実物を両方見せ、ビッグとワイドの 1 枚の違いと最初と最後の 1 枚の違いを全体で確認した。数学の世界と現実の世界をつなげる活動であり、実際にどれだけ違うのか目で見えるようにした。

7. 授業の考察

<成果>

①観察することにより伴って変わる 2 つの数量に気づくことができた

1 時間目の授業の自力解決で、紙の厚さを無視した生徒が 16 人で、紙の厚さを考慮しようとした生徒が 17 人であった。つまり、紙の厚さを考慮しようとした生徒は、クラスの半数であることがわかる。ここでは、巻き目が増えることに伴って 1 枚の円周が大きくなるということは言っていないが、生徒 F のように観察や操作を通して、その関係があるのではないかということを生徒が見つけることができた。

最初は巻いていくにつれて芯の大きさが変わっていくことに気づきませんでした。途中で気づいたので良かったです。でもまだ答えはわかっていないので、がんばりたいです。

生徒 F の学習感想(1 時間目)

また、1 時間目で厚さを無視して考えた生徒 G は、2 時間目で厚さに着目した考えをクラス全体で考えることができ、考えが広がったことが読み取れる。

厚さを求めることまで考えられなかったのが、今回考えることができて良かったです。ビッグとワイドの最初と最後の差がけっこうあってびっくりしました。

生徒 G の学習感想(2 時間目)

1 時間目で厚さを考慮しようとした生徒 H は、面積の求め方まで辿りついていなかった。そのため、2 時間目でクラス全体で求め方を考

えたことによって、考えが深まったことが読み取れる。

厚さの分面積が増えるのかなとは思っていたけど、求め方全然わからなかったので、今日みんなを確認できてよかったです。x と y の関係もわかりました。

生徒 H の学習感想(2 時間目)

②日常の問題を数学で解決するよさを実感することができた

1 時間目の予想の段階では、ワイドの方が面積が大きいと考える生徒が多かったが、面積を求めることで、ビッグの方が面積が大きそうであることを求めることができた。生徒 E のように、予想と計算した結果が異なり、計算した結果の方が正しそうであるとわかったとき、日常の問題を数学で解決するよさを実感するのではないかと考える。

最初はワイドの方が大きいと思っていたけれど、計算してみたらビッグの方が大きかった。計算は便利だと思った。

生徒 E の学習感想(1 時間目)

2 時間目の授業の最後に、最初の 1 枚と最後の 1 枚でどれだけ違うのか、数値で確認した後に、実物を用いて、見せる活動をおこなった。計算で数値を求めても、それが実際にどれだけの長さなのかわからない生徒もいるので、実物を用いて長さを確認することは、数学の世界と現実の世界をつなげる上でも有効であると考えている。

一番はじめのと最後のとじゃ、紙の大きさがけっこう違うんだなと思いました。そういう所は気にしたことがなかったので驚きました。こういうことをもとに、身の回りのものも興味ができました。

生徒 I の学習感想(2 時間目)

生活の中にも 1 次関数があって、こんなところで使われているんだと驚きました。厚みでこれだけの差が生まれるのだなと思いました。

生徒 E の学習感想(2 時間目)

< 課題 >

①厚さを考慮する考えが難しかった

半数の生徒が、厚さを無視した考えで自力解決していた。このことから、そもそも巻き目が増えることに伴って 1 枚の円周も大きくなることに気づけなかったのか、気づいていたがあえて 1 枚の円周を全て同じだとみなしたかのどちらかであると考ええる。前者の場合、全ての 1 枚の円周が、一番内側に巻いてある 1 枚の円周と同じであると思い込んでいたことが考えられる。実物の観察や操作を十分に行うことにより、「コロコロ」の構造を捉えさせることが大切であると考えた。後者の場合、厚みを加えていいのか迷ったことが考えられる。厚さを自分で調べて設定することが難しかったと考えられるため、「自分で定規で測って」ということを強調する必要があったと考える。

8. まとめと今後の課題

掃除用具「コロコロ」の効果を調べる際、生徒たちはシートの面積でその効果を比較できると考えた。総面積を求める際、1 枚の厚さを考慮したとき、巻き目が増えるに伴って、1 枚の円周が一定に大きくなる規則を見つけることができた。さらに、文字に表わすことにより 1 次関数の関係になることに気づき、数学を活かして解決することができた。関数の学習で日常事象を扱う際には、観察や操作を通して、伴って変わる数量関係を見いだし、その規則を追究する授業実践をおこなっていきたいと考える。今後も「関数の考え」について研究を続けていきたい。

9. 引用・参考文献

- ・算数科教育学研究会編(2010)『新編 算数科教育研究』学芸図書
- ・清水宏幸(2006)『日常の場面で1次関数を活用させる指導ーガス料金について考えさせる指導ー』日本数学教育学会数学教育 88(7) p.2ーp.9
- ・中島健三(1981)『算数・数学教育と数学的な考え方』金子書房
- ・文部科学省(2017)『小学校学習指導要領解説算数編』
- ・文部科学省(2017)『中学校学習指導要領解説数学編』