

中学校数学における方程式の理解に関する研究 —等式の性質の使い方の理解に関する困難性に焦点を当てて—

鷹野 公俊 (M19EP030)

1. はじめに

図1は、平成29年度全国学力・学習状況調査（以下全国調査）の問題の一部である。この問題の趣旨は、「簡単な一元一次方程式を解くことができるかどうかをみる。」とされており、全国の正答率は83.2%であった。

数学A ③ 方程式の解き方とその利用

③ 次の(1)から(4)までの各問いに答えなさい

(1) 一次方程式 $4x = 7x + 15$ を解きなさい

図1：平成29年度全国調査 数学A③

これまでに出题された全国調査のうち、「簡単な一元一次方程式を解く問題」を整理すると、次の表1のような結果になる。

表1：簡単な一元一次方程式を解く問題

問題番号	問題の概要	正答率
H19A3(2)	一元一次方程式 $4(x+5) = 80$ を解く	83.6%
H20A3(1)	一元一次方程式 $-5x+7 = -x+31$ を解く	78.4%
H25A3(1)	一元一次方程式 $3x+7 = 9$ を解く	74.4%
H28A3(1)	一元一次方程式 $x+12 = -2x$ を解く	71.9%
H29A3(1)	一元一次方程式 $4x = 7x+15$ を解く	83.2%

図2は平成30年度全国調査の問題の一部である。この問題の趣旨は「方程式を解く場面

における等式の性質の使い方について理解しているかどうかをみる」とされており、全国の正答率は64.8%であった。

③ 次の(1)から(4)までの各問いに答えなさい。

(1) 一次方程式 $6x - 3 = 9$ を次のように解きました。

$$\begin{aligned} 6x - 3 &= 9 && \cdots \cdots \text{①} \\ 6x &= 9 + 3 && \cdots \cdots \text{②} \\ 6x &= 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

上の①の式から②の式へ変形してよい理由として正しいものを、下のアからエまでのの中から1つ選びなさい。

- ア ①の式の両辺に3をたしても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい
- イ ①の式の両辺から3をひいても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい
- ウ ①の式の両辺に3をかけても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい
- エ ①の式の両辺を3でわっても等式は成り立つから、②の式へ変形してよい

図2：平成30年度全国調査 数学A③

これまでに出题された全国調査のうち、「等式の性質の使い方の理解を問う問題」を整理すると、表2のような結果になる。

表 2：等式の性質の使い方の理解を問う問題

問題番号	問題の概要	正答率
H19A3(1)	一元一次方程式 $7x = 5x + 6$ を解くとき、移項の意味を選ぶ	61.7%
H21A3(1)	一元一次方程式 $4x + 7 = 15$ を解くとき、移項の意味を選ぶ	69.1%
H24A3(3)	一元一次方程式 $7x = 4x + 6$ を解く際に用いられている等式の性質を選ぶ	79.6%
H25A2(4)	二元一次方程式 $2x + 3y = 9$ を y について解く際に用いられている等式の性質を選ぶ	74.6%
H27A3(1)	一元一次方程式 $7x = 5x + 4$ を解く際に用いられている等式の性質を選ぶ	79.8%
H30A3(1)	一元一次方程式 $6x - 3 = 9$ を解くとき、移項の意味を選ぶ	64.8%

表 1 と表 2 を概観してみると、移項と等式の性質は出題された全ての問題において用いられており、その重要性がわかる。また、「簡単な一元一次方程式を解く問題」の正答率は約 80% であるが、「等式の性質の使い方の理解を問う問題」の正答率は約 70% である。特に注目したのは H19, H21, H30 の「移項の意味を選ぶ問題」の正答率の低さである。筆者はこの正答率の差に着目した。等式の性質と移項の重要性や、2 つの問題の正答率の差から、私は等式の性質の指導方法を検討する必要があるのではないかと考えた。

したがって本研究では、方程式を解く場面における等式の性質の使い方に焦点を当て、等式の性質を生徒に理解させるためにはどのよ

うな手段が考えられるかを先行研究から明らかにし、実際に指導を行う。指導が有効であるかを調査問題から明らかにしていく。

2. 研究の視点

(1) 等式の性質について

藤井斉亮他 (2016) では、「方程式を変形するには、次の **等式の性質** が使われる」と述べた上で、等式の性質を図 3 のようにまとめている。

≫ 等式の性質

① 等式の両辺に同じ数や式を加えても、等式は成り立つ。
 $A = B$ ならば $A + C = B + C$

② 等式の両辺から同じ数や式をひいても、等式は成り立つ。
 $A = B$ ならば $A - C = B - C$

③ 等式の両辺に同じ数をかけても、等式は成り立つ。
 $A = B$ ならば $AC = BC$

④ 等式の両辺を 0 でない同じ数でわけても、等式は成り立つ。
 $A = B$ ならば $\frac{A}{C} = \frac{B}{C} \quad (C \neq 0)$

さらに、図 3 を示したうえで、

また

⑤ 等式の両辺を入れかえても、等式は成り立つ。
 $A = B$ ならば $B = A$

として、⑤の性質も紹介している。

古藤 (1991) は、「方程式を解くとは、どういうことか。それは、与えられた方程式を同値変形して、最も簡単な方程式 $x = a$ を求めることである。その $x = a$ が解であり、この同値変形に用いられるのが『等式の性質』である。」と述べており、等式の性質は、方程式を解く際の同値変形の根拠であると述べている。

半田 (1995) は、「方程式の指導ではこれを機械的に解けるようになることにのみ力点が置かれる指導もよくみられる。方程式が機械的に解けるようになること、つまりアルゴリ

ズムのよさを身につけさせることは大切ではあるが、これのみが方程式指導の最重点ではない。」と述べている。これに加え「方程式を解くことは、等式の性質を用いた同値変形である。……すなわち、等式の両辺に同じ数を同じような操作をしたとき、また等式になるということ自身の理解は生徒にとって理解困難なことではなく、生徒にとっては当たり前の性質である。大切なことは、等式の性質によって解が変わらないという同値変形をしていることの理解である。」と述べており、同値変形の理解が大切であることを主張している。

以上の先行研究から、等式の性質の重要性を生徒に強調する活動に加え、同値変形であることを理解させるような活動を考案する。

(2) 移項の根拠が等式の性質にあること

全国調査では、移項の根拠が等式の性質にあることを問う問題が出題されている。移項によって式変形は簡単になるが、あえてその根拠を問うていることについて考察する。

Skemp (1992) は、理解について「関係的理解」と「道具的理解」の二つを区別している。「関係的理解」とは、なすべきこととその理由をともに知っていることであり、「道具的理解」とは、理由づけのない規則の適用であるとしている。ただ単にやり方だけを覚えて、問題に適用する生徒は、Skemp のいう「道具的理解」をしている生徒であり、移項の根拠を理解しつつ問題に適用できる生徒は「関係的理解」をしている生徒であるといえる。関係的理解には以下のような長所が挙げられている。

<関係的理解の長所>

- ① 新しい課題を解決するのに適している
- ② 記憶するのがより容易である
- ③ 関係的知識は、それ自身を目標とすることができる
- ④ 関係的スキーマは、質において有機的である

また、杉山 (2006) は「覚えることは少ないけれども、それから多くのものが作り出せるようにしておく、忘れても思い出せるようにしておく、こういうことが大事なことである。……覚えることを少なくして、できることを多くする……基礎的な知識に結びつけていろいろなことを理解することが大事である。」と述べており、Skemp が述べる関係的理解の重要性と同様のことを主張している。

Skempや杉山の主張から、移項の根拠が等式の性質にあることを理解させることは大切であることがわかった。したがって、移項の根拠が等式の性質にあることを理解させる活動を考案する。

(3) 試みたい工夫

以上の先行研究を踏まえて、次に示す(I)～(III)の方法で計画・実施していく。

(I) 等式の性質を黒板に常に掲示する

この方法では、等式の性質を黒板に常に掲示しておく。この取り組みは、生徒に等式の性質を常に意識させ、いつでも既習事項に戻ることを目的としている。

(II) 生徒が解説を行う際に根拠を説明させる

この方法は、生徒が板書した解答を生徒自身が解説する際に、式変形の根拠を逐一尋ねる。この取り組みは等式変形の根拠が等式の性質にあることを意識させることにより、同値変形の理解、移行の根拠が等式の性質にあることを理解させることを目的としている。

(III) 解を元の方程式に代入し、等式が成りたつか確認したり、逆算を行ったりする。

この方法は、等式の性質を用いて式を変形しても方程式の解は変わらないという、同値変形であることの理解を図ることを目的としている。

3. 検証授業の目的と方法

(1) 検証授業の方法

- 対象校：山梨県内公立中学校
- 対象生徒：第1学年生徒(54名)
- 授業実践
 - ・単元：方程式
 - ・指導計画（全10時間）

(1) 方程式とその解き方

- 1. 方程式とその解 (3時間)
- 2. 方程式の解き方 (1時間)
- 3. いろいろな方程式 (2時間)

(2) 一次方程式の利用

- 1. 一次方程式の利用 (4時間)

(2) 検証授業で取り組む工夫の具体

検証授業における、(Ⅰ)～(Ⅲ)の具体的な方法を考察する。

(Ⅰ)の方法

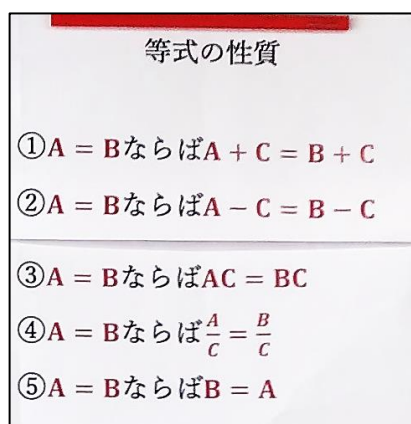


図4：「等式の性質」のカード

等式変形の性質の指導以降、図4の「等式の性質」のカードを常に黒板に貼りだしておき、生徒が等式の性質を意識しやすいようにする。この方法は方程式の単元、全10時間の授業で実施する。

(Ⅱ)の方法

解答を生徒に板書させ、その解答について板書した生徒自身や、他の生徒に解説をさせる活動を授業内に取り入れる。また、その際

には説明の根拠を言うように指導しておく。生徒が解説をする際に、根拠が示せない場合には、筆者が「なぜこの式に変形できるの？」と根拠を尋ねることによって、等式変形の根拠が等式の性質にあることを意識させる。この方法は方程式の単元、全10時間の授業で実施する。

(Ⅲ)の方法

等式の性質を用いて方程式を解いた後に、解を元の方程式に代入させる。この活動によって「等式の性質を用いて方程式を変形させたのであるから、元の方程式に代入しても等式は成り立つ」ということを実感させる。この方法は、方程式の単元3時間目以降、全ての時間で実施する。

また、方程式の導入の場面では「貯金箱の中の50円玉は何枚か」という題材で、生徒それぞれに文字式を立てさせる。

方程式の利用に入る前に、その際に出てきた解 $x = 200$ を等式変形すれば、それぞれが立てた式に戻ることを確認する。

例：

$$\begin{aligned}x &= 200 \\4x &= 800 \\4x + 236 &= 1036\end{aligned}$$

この方法は、方程式の単元1時間目、7時間目において実施する。

(3) データの収集

検証授業において収集したデータは、映像と音声の記録、生徒の書いたノート、学校が行っている「自主学习ノート」である。ビデオカメラは一台使用した。ビデオカメラは、教室と黒板を中心に全体を撮影した。

4. 検証授業の実際

以下では(Ⅰ)～(Ⅲ)の方法を実践した際の筆者による見取りや生徒のノートなどから、(Ⅰ)～(Ⅲ)のそれぞれの良かった点や、課題

点を省察する。

(I)の方法

【成果】

- ・ 方法(Ⅱ)の実践の際に、生徒が掲示されている等式の性質を指さしながら説明をする様子が見られた。

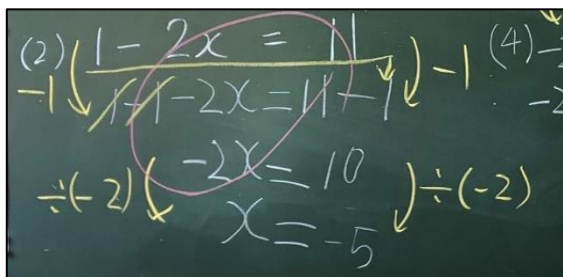
【課題】

- ・ 授業を観察していた先生から「作りが雑なので、生徒にとって印象が悪い」という意見を頂いた。また、生徒の中には「文字が小さくて見えにくい」と発言していた者もいたので、型紙で作ることや、文字のフォントを大きくするなどのデザインを見直す必要があった。

(Ⅱ)の方法

【成果】

- ・ 図5のように、生徒自身が「-1」や「÷(-2)」、矢印などを書き込み、説明を行っている様子が見られた。この様子から、この生徒は移項の根拠が等式の性質にあることを確認できていたといえる。



(2) $1 - 2x = 11$ (4) $-1 - 2x = 10$
 $\div (-2)$ $-2x = 10$ $\div (-2)$
 $x = -5$

図5：移項の指導の際の生徒の記述

(Ⅲ)の方法

【成果】

- ・ 等式変形の導入時、次のような場面があった。

$$\begin{aligned}x + 9 &= 5 \\x + 9 - 9 &= 5 - 9 \\x &= -4\end{aligned}$$

筆者は「この $x = -4$, って $x + 9 = 5$

に代入しても方程式は成り立つの？」という発問をし、元の方程式に解を代入する活動を行った。その際に生徒から「答え(解)は変わらないんだ」(下線部筆者加筆)という発言が出された。筆者はこの発言を、生徒が同値変形を理解した発言と判断した。

【課題】

- ・ 等式変形を行わずに、左辺が5になる数を探していた生徒がいたが、この生徒にとっては $x = -4$ を代入したときに、 $x + 9 = 5$ が成り立つことは自明であった。そのため、等式変形を用いて解を求める技能をある程度習熟した後に、この方法を行う方が良いのではないか、という示唆が得られた。
- ・ 数学的には同値変形であることは確認できるが、問題文と合わせて式を読み取ることができなかった。この課題を改善するために、天秤のモデルと関連付けて方法(Ⅲ)を行うことが有効であると考えられる。その理由は、天秤のモデルであれば、問題文と合わせて式変形を読み取る必要はなく、式変形の様子を視覚的に確認することができる。平林(1987)「天秤の二つの皿は方程式の両辺に、天秤のつりあい方程式における相当性(いわゆる『等号の成立』)に対応させられ、天秤のつりあいに関する物理的知識は、いわゆる「等式の性質」の理解に利用される。」と述べており、天秤のモデルは等式の変形が物理的知識に対応できることを示している。したがって、逆算を行う活動においても天秤のモデルを併用して指導に当たると有効であると考えられる。

5. 調査問題

(1) 調査問題の対象

令和元年11月初旬、検証授業を受けていた生徒54名に対して調査を行った。

(2) 調査問題の内容

検証授業の効果を測定するために、「方程式の解を求める問題」「移項の根拠が等式の性質にあることを問う問題」が同一年度に採用されている平成21年度の全国調査を基に作成する。また、解答時間は15分とする。

なお、全国調査は中学校第3学年を対象に行っているが、調査問題の対象者は中学校第1学年である。そのため、中学校第1学年までの既習事項を扱う問題を採用し、全国との正答率を比較する。調査問題は以下の通りである。

問1	下の□に当てはまる数を答えなさい $15 \div 9 = 5 \div \square$
問2	$2 \times (-3^2)$ の計算で、 (-3^2) の部分はどのように計算しますか。 下のアからオまでのの中から正しいものを1つ選びなさい。 ア $(-3) \times (-3)$ イ $-(3 \times 3)$ ウ $-(3 \times 2)$ エ $+(3 \times 3)$ オ $+(3 \times 2)$
問3	次の式を計算せよ $2 \times (5 - 8)$
問4	次の方程式を解きなさい。 $\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x - 7$
問5	一次方程式 $4x + 7 = 15$ を次のように解きました。 $4x + 7 = 15 \cdots \cdots \textcircled{1}$ $4x = 15 - 7 \cdots \cdots \textcircled{2}$ $4x = 8$ $x = 2$ 上の①の式から②の式への変形では、7を左辺から右辺に移項しました。移項してよい理由は、等式の性質を元に説明できます。 7を移項してよい理由として正しいものを、下のアからエまでのの中から1つ選びな

さい。

ア ①の式の両辺に7をたしても等式は成り立つから、移項してよい。

イ ①の式の両辺から7をひいても等式は成り立つから、移項してよい。

ウ ①の式の両辺に7をかけても等式は成り立つから、移項してよい。

エ ①の式の両辺を7でわっても等式は成り立つから、移項してよい。

各問の趣旨と学習時期を整理すると次の表3のようになる。

表3：各問の趣旨と学習時期

	趣旨	学習時期
問1	比の意味を理解しているかどうかをみる	小学校第6学年
問2	指数を含む正の数と負の数の計算で、指数の計算の仕方を理解しているかどうかをみる	中学校第1学年
問3	() を含む正の数と負の数の計算ができるかどうかをみる	中学校第1学年
問4	係数に分数を含む一元一次方程式を解くことができるかどうかをみる	中学校第1学年
問5	方程式を解くに当たって、等式の性質と移項の関係を理解しているかどうかをみる	中学校第1学年

問1では、対象者の小学校までの学習の理解を調べる。問2、問3では、対象者の方程式の単元以外の中学校の学習の理解を調べる。問4、問5では、今回の検証授業の効果を調べる。

(3) 調査結果

①対象者と全国との正答率の比較

調査問題の対象者54名と全国の正答率、達成率をまとめると表4の通りになる。なお、表4の項目の「達成率」とは、分母を全国の正答率、分子を対象者の正答率としている。達成率が100%以上であるとき、対象者の正答

率が全国の正答率以上であることを示している。

表4：対象者と全国の正答率の比較

	対象者	全国	達成率
問1	87.0%	89.1%	97.6%
問2	61.1%	76.2%	80.2%
問3	77.8%	89.9%	86.5%
問4	38.9%	53.5%	72.7%
問5	63.0%	69.1%	91.2%

②問4と問5の解答類型

問4と問5を平成21年度の全国調査解答類型を基に整理すると、対象者と全国の反応率を整理すると次の表5、表6の通りになる。

表5：問4の解答類型

解答類型	対象者の 反応率 (%)	全国の 反応率 (%)	正 答
1 ア と解答しているもの	13.0	12.7	
2 イ と解答しているもの	63.0	69.1	◎
3 ウ と解答しているもの	14.8	11.8	
4 エ と解答しているもの	3.7	5.5	
9 上記以外の解答	0.0	0.0	
0 無解答	5.6	1.0	

表6：問5の解答類型

解答類型	対象者の 反応率 (%)	全国の 反応率 (%)	正 答
1 -14 と解答しているもの	38.9	53.5	◎
2 14 と解答しているもの	3.7	4.1	
3 $\frac{7}{2}$ または $-\frac{7}{2}$ と解答しているもの	7.4	9.8	
4 7 または -7 と解答しているもの	5.6	3.9	
9 上記以外の解答	14.8	14.2	
0 無解答	29.6	14.5	

(3) 考察

問1は小学校第6学年で学習する内容であった。また、問1の正答率は対象者87.0%、全国89.1%であり、達成率は97.6%である。対象者と全国との正答率にはあまり差がないことから、対象者は小学校段階の学習はある程度理解できていることが分かる。

問2～5は全て中学校第1学年で学習する内容であった。問2～問5の正答率は、全国の正答率を下回っているが、この理由としては対象生徒の学年が違ふことの影響が大きいと考える。全国調査の対象生徒は中学校第3学年であるが、本調査の対象生徒は中学校第1学年であった。生徒は、中学校第1学年の比例以降の単元の学習を進めていく中で、全ての項目の正答率が向上していくと考える。そのため、すべての問題において、対象者の正答率が全国の正答率を下回ったと考える。

問4の趣旨は、「係数に分数を含む一元一次方程式を解くことができるかどうかをみる。」であり、本研究の目的の一つである。しかしながら、問4の正答率は対象者38.9%、全国53.5%であり、達成率は72.7%であった。また、全国の無回答の反応率は14.5%であったが、対象者の無回答の反応率は29.6%と2倍近い値となっている。これは、中学校第1学年の生徒にとって、分数計算が困難であることを示していると考えられる。問4の達成率は全ての問題の中で最も低く、大きく課題が残る結果となった。

しかし、図6で示す解答を行う生徒も表れた。この生徒は指示がなかったにもかかわらず、「 $\times 2$ 」などの記述を行っており、方法(I)(II)が定着している様子が見られた。

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x - 7$$

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x = -7$$

$$\frac{2}{4}x = -7$$

$$\frac{1}{2}x = -7$$

$$\times 2 \quad x = -14 \quad \times 2$$

図6：生徒Aの記述

問5の趣旨は、「等式の性質の用い方の理解を問う問題」であり、本研究の目的の一つである。問5の正答率は、対象者63.0%、全国69.1%であり、達成率は91.2%である。問5における対象者と全国との正答率にあまり差がないことは、検証授業が有効であったことを示していると考えられる。しかし、全国の無解答の反応率は1.0%に対して、対象者の無解答の反応率は5.6%であった。これは新たな課題であるので今後の研究課題としたい。

6. まとめと今後の課題

本研究では、方程式を解く場面における等式の性質の用い方に焦点を当て、等式の性質を生徒に理解させるためにはどのような手段が考えられるかを先行研究から明らかにし、実際に指導を行った。指導が有効であるかを調査問題から明らかにしていった。この方針のもと、(Ⅰ)等式の性質を黒板に常に掲示する(Ⅱ)生徒が解説を行う際に根拠を説明させる(Ⅲ)解を元の方程式に代入し、等式が成り立つか確認したり、逆算したりする、という活動を計画・実施した。授業や調査問題の結果の分析から、(Ⅰ)～(Ⅲ)のそれぞれの方法において成果や課題が見つかった。

最後に今後の課題について述べる。

第一に、調査問題の問5において、対象者の無解答の反応率が高かった点である。問5は選択式にもかかわらず、無解答の反応率が5.6%であり、全国の無解答の反応率は1.0%に対して高い結果となってしまった。今後は、この問題を明らかにするための調査問題を作成したり、インタビュー調査を行ったりすることで、原因を明らかにする必要がある。

第二に、問4は係数に分数を含む問題であったため、移項の根拠が等式の性質にあることの理解との関連が図れなかった点である。本研究は「簡単な一元一次方程式を解く問題」の正答率と、「等式の性質の用い方の理解を問う問題」の正答率の差に着目したこと

が動機である。しかし、調査問題では係数に分数を含む方程式を取り扱ってしまったため、正答率の差との関連を図ることができなかった。調査問題のデザインを考え直し、生徒の方程式の理解を明らかにする必要がある。

謝辞

本研究を進めるにあたり、実習校の先生方にご協力頂きましたことを感謝致します。また、猪股真弥先生には研究方法のみならず、生徒指導などにも重要な示唆を賜りました。感謝致します。

7. 引用文献

- ・藤井斉亮他(2016)「新編 新しい数学」(東京書籍) p. 86
- ・半田進(1995)「考えさせる授業 算数・数学 - 実践編」(東京出版) p. 136.
- ・平林一栄(1987)「数学教育の活動主義的展開」(東洋館出版) pp. 328-329
- ・国立教育政策研究所(2007-2015)全国学力・学習状況調査 解説資料 報告書 中学校 数学
- ・古藤怜(1991)「新・中学校数学指導実例講座 2 数・式」(金子書房) pp. 115-133
- ・文部科学省(2018)「中学校学習指導要領解説 数学編」
- ・R.R. Skemp(1992)「新しい学習理論にもとづく算数教育」(東洋館出版)
- ・杉山吉茂(2006)「杉山吉茂算数教育論選集 豊かな算数教育をもとめて」(東洋館出版) p. 28
- ・杜威(1991)「学校数学における 文字式の学習に関する研究 数の世界から文字の世界へ」(東洋館出版)