

併設型公立中高一貫校における数学科教材の開発

－関数領域の授業を通して－

M10EP010

新海 大博

1. 実践研究の目的

平成9年(1997)の中央教育審議会答申で、中高一貫教育の基本的な考えが示されてから10数年が経過した。現在公立の中高一貫校は全国で170前後設置されている。中高一貫校についてはメリット、デメリットがあるが、特色ある学校づくりを行うことができるということの意義は非常に大きい。私の勤務校である山梨県北杜市立甲陵中学・高等学校は、平成20年度の3月に中高一貫校の1期生が卒業したばかりである。また、昨年度には東京都立初となる白鷗中高一貫校が1期生を出すなど、公立中高一貫校の多くは、ここ数年で1期生が卒業し、公立としての中高一貫校の存在意義も今後更に問われることになる。

私立では以前から中高一貫校が数多く存在し、一部の学校では授業において教科書の進度を早め、中学の段階で、すでに高校の範囲を学習するカリキュラムを採用している。しかし、小学校、中学校、高等学校における子どもの発達段階において、指導時期を早めるカリキュラムが、子どもの学力を伸ばすのに最も適したものとは限らない。現にそのような学校では有名大学に合格者を多数輩出する半面、理解することができないまま先に進んでしまい、結果的に学問に対する興味・関心が薄れてしまう生徒が出る恐れがある。高校の内容を先取りして中学で行う教材ではない、理想のカリキュラムや教材を考えることが必要である。

中高一貫校のメリットとして、高校受験がないために、中学3年の2～3学期に伸び伸びとした学校生活を送ることができるということが挙げられる。その時期に生徒は部活を続けられたり、受験勉強に特化しない学習を行ったりすることができる。また、高校に進学してからの現場での学習

課題として、「新しい見方・考え方が多く、生徒が理解し、使えるようになるまでには時間がかかる」ということが挙げられる。そこで私は、高校数学の思考法のいくつかを「できる限り中学の学習範囲内に収まる形で」授業展開することはできないか、ということ考えた。中高一貫校の生徒が中学3年の秋以降、受験のない比較的余裕のある生活の中で、「じっくり1問1問考える」ことを行い、疑問に思ったことを深く考える習慣を身につける。その習慣が身につくことによって授業に対して受け身の姿勢が弱まる。高校数学に対する興味・関心も高まり、真の数学力が身につくと考える。私は今回、中高の数学学習のスムーズな接続に焦点をあて、高校生が数学に苦手意識を持つきっかけとなることが多い、関数領域における数学科教材を開発したいと考えた。

2. 昨年度の実習から

私は昨年度、2つの連携協力校で数学科の授業についての実習を行った。2校の実習を通して高校の視点から見て強く感じたことは、中学の数学における関数の場面では、「定数の値によってグラフが動くというイメージを、もたせることのできる授業場面が非常に少ない」ということである。例えば、生徒や教師は $y=ax$ や $y=2x+b$ (a, b は定数)と黒板に書いたり、問題を解く上で設定をしたりする。しかしこのグラフをイメージしてみろという、定数に文字を用いてグラフを想像させるような場面は、中学の授業の中では非常に少ない。「 $y=2x+1$ のグラフをかいてみよう」という問いに対しては、多くの生徒はグラフをかくことができる。しかし、「 $y=2x+b$ のグラフをかいてみよう」と問われたときに、「傾きが2である

平行な直線をイメージできる」または「 y 切片の任意の場所に点 b をとって傾き 2 である直線を引くことができる」生徒は非常に少ない。しかし、高校に入学してすぐの 6 月頃に学ぶ「2 次関数」では、2 次関数の中に定数 a が含まれ、軸が移動するグラフの最大値、最小値を求める問題や、グラフが y 軸方向だけでなく x 軸方向に移動する問題のように、理解に時間のかかる難易度の高い新出事項が毎日のように出てくる。そのため理解が不十分となり、高校の 2 次関数をきっかけにして数学が嫌いになってしまう生徒がいる。この中学と高校における問題の質の差を、どのようにして埋めていけばよいのだろうか。

また、小学校、中学校では数学の内容の多くには、似た内容や思考の過程を繰り返すような要素（スパイラル）が含まれているが、中学数学から高校数学への移り変わりの際、その要素は非常に少ない。例えば関数の分野において、文字定数 a を含むグラフや、グラフの平行移動は高校 1 年から学習する。中学ではグラフが「動く」ということは学習指導要領上に明記されていない。中学では具体的な事象から数学を表現し考察する力を問うことが重要だからである。しかし数学の概念を具体的な計算から一般化したものとして扱う際に、変数と定数の概念を、高校の初期の段階に理解し即座に身につけることは非常に困難である。また、「高校入試にでないから」という理由で、中学時に「動く」ことのイメージを磨かないことは、定まっているグラフでも定数の値によって変わってしまうというイメージ力が養われない、ということである。中学の時に記述を嫌がったり、途中過程を書かずに値を求めたがったりする生徒が多いことも、動かないグラフや値を求めるからだ、と私は考える。中学の段階から、定数やグラフの概念の拡張を少しずつ学び、考えることが必要である。

3. 中高を結ぶ数学科教材の作成

以上の視点から、中学生に行うことのできる、中高の数学学習のスムーズな接続に焦点をあてた数学科教材を開発した。この教材は中高一貫校に

限らず、扱うことができる。この教材の目的は 2 つある。1 つ目は授業を受け、考えて納得できなければ家に帰って、もう一度問題についてじっくり考え直してもらう。その姿勢を身につけてもらうことである。2 つ目の目的は、この教材が中学と高校の数学の理解の仲立ちとなり、生徒が高校に進学した後に役立つということである。授業のテーマは、①繁分数と、0 を含む分数の値②不等式の基礎③定数を含む直線の範囲④条件付きの 2 変数関数の最大値、最小値⑤定数を用いたグラフの最大値、最小値 である。また、どの教員でも目標や視点を明確にするために、学習指導案を作成した。

①は、繁分数の計算方法や $1/0$ などの不定な値に対する理解の授業である。繁分数においては、高校数学 I 「三角比」の計算において必要なものにもかかわらず、それまでの学習において扱うときがない。また、不定な値に関しては、高校数学 III 「極限」で扱う。その時に初めて教わるのではなく、中学と高校の数学のスムーズな接続として一度授業で扱うことで、高校時でのとまどいを軽減させることができると考える。この教材の特長として、繁分数の多様な計算方法を理解する、不定な値を視覚化することで、不定な値に対して理解を深める、が挙げられる。

②は、「範囲」の基礎的な考えである不等式の扱いに関する授業である。中学では数量の関係を表す式として不等式を扱っているが、私は中学の段階で、方程式と同様な性質として、不等式の性質を中学の時点で一度考えてみることにより、方程式の理解が深まると考える。また、ここではあくまで③～⑤の中で扱う計算技法として取り上げ、不等式を深く取り上げるのはあくまで高校入学後とする。

③は、1 次関数 $y=ax+b$ において、定数と関数の関わりを理解する授業である。これまでの生徒の誤答から、次の 2 点の誤解があるのではないかと感じた。1 点目は中学校の段階では、1 次関数 $y=ax+b$ のグラフの形は「傾きが正のグラフ」一通りであると誤解しているのではないかという点、

2点目は変域の問題において、 x の変域の端の値さえ代入すれば y の変域を出せると、短絡的な理解しかしていないのではないかという点である。

③は以上の2点の誤解を解消できる教材であると考えている。この教材の特長として、関数における定数の意識づけ、傾きが異なる直線の x と y の値の対応関係の理解、グラフの連続性の理解、別解が提示されたときの受け入れる姿勢、 x 軸と交わるときの交点の求め方の理解、が挙げられる。

接続プリント③
名前()

1次関数 $y=ax+b$ について、

① $a<0$ とする。 $y=ax+b$ において、 x の変域が $1\leq x\leq 4$ のとき、 y の変域が $7\leq y\leq 12$ であるように、定数 a, b の値を求めよ。

② $a\neq 0$ とする。 $y=ax+4$ が $-2\leq x\leq 3$ の範囲で常に正であるとき、 a の値の範囲を求めよ。

図1. 接続プリント③ (改)

科目		数学	期 次	第2期 第2期
使用教材		接続プリント③	実施日	平成23年11月9日 (生時時間中3回日)
本時の主題		一次関数 $y=ax+b$ は、定数 a, b の値によって直線の傾きや位置が変化する。そのことをしっかりと押さえた上で、条件を満たす直線をどのように見つければよいかを考えられる。	対 象	中学3年生
本時の目標		定数の意味を理解した上で、グラフを用いて一次関数について理解する。	場 所	中学3年教室
授業の特長		関数における定数の意識づけ、傾きが異なる直線の x と y の値の対応関係の理解、グラフの連続性の理解、別解が提示されたときの受け入れる姿勢、グラフの一つのものとして見るのではなく、傾きによって変わりうるものだとこのこと、 x 軸と交わる点の求め方の理解		
時間	課程	指導事項	留意点	目標
5 7 15 20 25 35 45 50	導入	T 1 傾きや定数の意識づけの復習 T 2 答え合わせ	・思考自体は中学の範囲でできるが、解答を見つけるために簡単な不等式を解くことが必要のため、簡単な不等式の問題を復習して行う。	
	展開	T 3 1次関数 $y=ax+b$ について、 a, b の値によって何が定まるかを考えよう。 S 1 $a>0$ のとき、右よりの直線で、傾きが大きいほど傾きが急。 S 2 $a=0$ のとき、 $y=b$ (0, b) を通り、 x 軸に平行な直線。 S 3 $a<0$ のとき、右よりの直線で、傾きが小さいほど傾きが急。 S 4 $b=0$ のとき、原点を通る直線 (比例の式) S 5 $b\neq 0$ のとき、 y 切片が b の直線	・関数は「変数」「変域」という言葉をよく使っているが、その中で「定数の値によってグラフの形が変わる」ということを押さえる。 ・生徒はまだ気づいていないが、高校ではよく出てくる「場合分け」を定数の値によって行う。	・関数における定数の値によって分類が理解できる。 ・グラフの一つのものとして見るのではなく、傾きによって変わりうるものだと理解できる。
	15	T 4 ①を解いてみよう。 展開図復習		
	20	S 6 $a=1$ のとき $y=2, a=-1$ のとき $y=12$ を代入。 $a=5/3, b=16/3$ S 7 傾きが負であるから、(グラフを簡単に描いて) $a=1$ のとき $y=12, a=-1$ のとき $y=7$ を代入。 $a=5/3, b=16/3$ これは $a=0$ を満たす。	・問題文中にある「 $a=0$ のとき」が何を意味しているかを考えさせる。 ・直線は傾きが負であり、かつ連続であるためこの解法が成立することを簡単に述べても良い。 ・②③は余数がある問題や生徒のためには、基本的には授業では行わない。	・傾きが異なる直線の x と y の値の対応関係が理解できる。
	25	T 5 ②を解いてみよう。 展開図復習	・S 8, S 9 は中学生の一部で考えつく解法であると考えられる。 生徒の思考する時間をできる限り考え、答えを見つけても別の求め方がないか生徒に考えさせる。	・別解が提示されたときの受け入れる姿勢がある。
45 50	まとめ	T 5 授業内容のまとめと感想記入	・S 10, S 11 は教師側から提示してみても良い。	・ x 軸と交わる点の求め方を理解できる。

図2. 接続プリント③学習指導案

④は、条件付き2変数関数の授業である。扱う問題は、連立方程式のときに扱った代入法の考えを生かして、2変数関数の文字を減らし、最大値、最小値を求める問題である。この教材の特長として、関数の連続性、変域の見方を広げる・豊かにする、変域を求める際にグラフの便利さを実感できる、文字を減らし、条件を整える、が挙げられる。

⑤は、定義域が変わるグラフの最大値・最小値の問題を考える授業である。高校生にとって、2次関数の「定義域が動く」グラフの最大値・最小値を求める問題は、イメージが難しいうえに、平方完成をしっかりとできるか、凹凸を理解しているか、どの式に x に値を入れ y の値を出すか、など、その思考に至るためのステップが非常に多い。高校に入ってからすべてを身につけるのは本当に難しい。そこで中学の段階でも凹凸を理解したり、定数を理解したりできるような教材を作成した。この教材の特長として、定数の意味の理解、変域が変わるグラフのイメージを持たせる、グラフの種類に広がりを持たせる、数学を日本語で表現することの意識づけをする、解答が複数ある問題に対する意識づけをする、が挙げられる。

4. 教職大学院での実習内容と考察

上記で作成したテキストを用いて実習を行った。大学院2年目となる今年度は、勤務校である甲陵中学校・高等学校が連携協力校である。通年で25回の実習を行った。

甲陵中学校

中学3年生の授業を週4回行う中で、実習を行った。本中学は山梨県唯一の併設型公立中高一貫校である。生徒は素直で、理解の深さには個人差があるが、全体的に理解度は高い。ここでは9月に行った、上記のテキスト①、③、④を用いた授業の内容について述べる。

①繁分数と、0を含む分数の値

このテーマは、昨年も連携協力校の山梨大学附属中学で行ったことがある。B/A の値を考えるのだが、大きくテーマとして2点に分けられる。授

業としては、繁分数の値を求めることができたが、多様な考え方までは考えつかなかった生徒が多かった。他人の発表を聞いて、参考になった生徒も多かったようである。また、 $0/1$ や $1/0$ の値は、ヒントを与えても考えつかなかった生徒が多かった。しかし $1/0.1$, $1/0.01$, $1/0.001$, $\dots$ と分母の値を小さくすることで、 $y=1/x$ や $y=x/1$ のグラフを用いるという、こちら側の意図を汲むことができた生徒もいた。

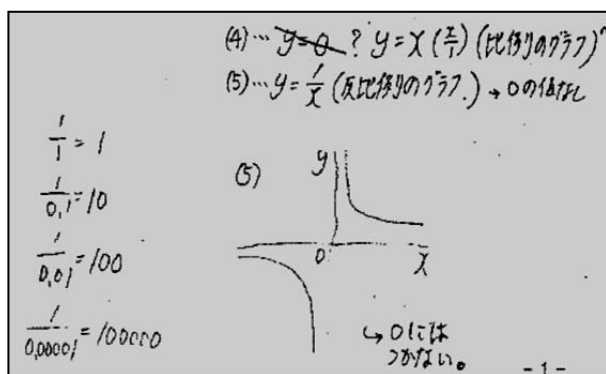


図3. $1/0$ の値が存在しないことの生徒の記述

③定数を含む直線の範囲

改めて $y=ax+b$ の a や b の符号について直線の傾きや位置を考えたのにも関わらず、そのあとの問題で、直線の傾きを正だと誤答してしまった生徒が数多くいた。答えが間違っていることを別の生徒から引き出し、正解を導いた。またこの授業で最後に行った問題は、中学の範囲でも解くことができるが高校の数学 I につながる別解も考えられる問題である。



写真1. ③の誤答について説明する

問題

a を定数とする。 $y=2x+a$ が、 x 軸と2と3の間で交わるとき、 a の値の範囲を求めよ。

解法1(グラフを平行移動する考え)

$y=2x$ を平行移動したときの y 切片に注目する。 x が1増加するときの y の増加量が2であるから、グラフで書いていくと、右上図のようになる。すると、 x 軸上で2と交わるときは $y=2x-4$ 、 x 軸上で3と交わるときは $y=2x-6$ であるから、条件を満たす a の範囲は、 $-6 < a < -4$

解法2(交点を通る直線を見つける考え)

$y=2x+a$ が $(2, 0)$ を通るとき、 $0=4+a$ より $a=-4$ 、同様にして $(3, 0)$ を通るとき $a=-6$ 、求める範囲は $y=2x-4$ と $y=2x-6$ の間であるから $-6 < a < -4$

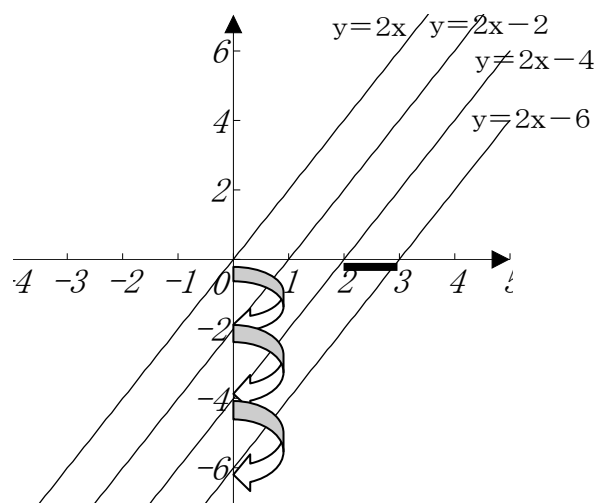


図4. グラフから a の範囲を見つける解法

解法3(直線を方程式と見る考え)

$y=2x+a$ が x 軸と交わるとき x の交点の座標は、 $0=2x+a$ を解いて、 $x=-a/2$ 、これが2と3の間にあればよいから、 $2 < -a/2 < 3$ これを解いて、 $-6 < a < -4$

解法4(1次関数のグラフの位置を読み取る考え)

グラフの $x=2$ のときの y 座標が負であり、 $x=3$ のときの y 座標が正であれば、グラフは x 軸と、

2 と 3 の間で交わる。

すなわち $2 \times 2 + a < 0$ かつ $2 \times 3 + a > 0$ を解いて、 $-6 < a < -4$

解法 1, 2 が中学生で十分に考えつくことのできるもの、解法 3, 4 は数学 I で扱う思考を要するものである。今回は授業の展開が思い通りにいかず、解法 3, 4 を気づかせることができなかった。指導案に反省点を残しておいたので、来年は更に思考力を磨く授業を行いたい。

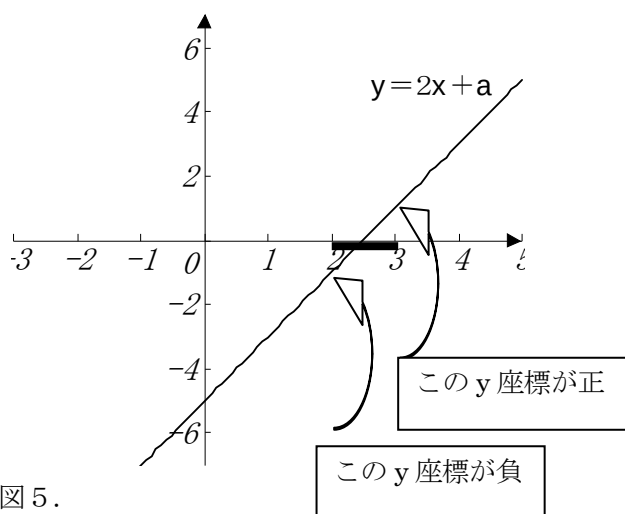


図 5.

1 次関数のグラフの位置から範囲を求める考え

④条件付きの 2 変数関数の最大値, 最小値

問題. x, y が $2x + y = 6$, $1 \leq x \leq 5$ を満たしながら変化するとき, $3x + 2y$ の最大値, 最小値を求めよ。

生徒の解答は, x の変域に対する y の変域を出し, x の最大値と y の最大値を取るときが求める最大値, x の最小値と y の最小値を取るときが求める最小値という考え方をしているものが多かった。しかしその解答の x と y の組み合わせでは, 条件 $2x + y = 6$ を満たさない。他には x と y の対応表をつくり, そこから最大値や最小値を求めている者もいた。答えは合っているが, 整数値でしか考えていないため, 厳密な解答であるとは言い難い。しかし, 「中 2 で教わった連立方程式の代入法の考えを使おう」というヒントを与えると, 答えにたどり着いた生徒が数名いた。

$$\begin{aligned}
 3x + 2(2x + 6) &= 3x - 4x + 12 \\
 &= -x + 12 \\
 3x + 2y &= -x + 12 \\
 \uparrow \\
 x \text{ の値が大きいほど, 値は小さい} \\
 \hline
 \text{答えに } \textcircled{4} \text{ 11, } \textcircled{5} \text{ 7}
 \end{aligned}$$

図 6. 条件付き 2 変数関数の最大値, 最小値を求めときの生徒の記述

以上①から⑤の授業については, 毎回生徒からの感想を集めた。ここでは①, ③, ④についての生徒の感想の一部を掲載する。

①について

- ・ $1/0$ の値がない理由を改めて確認できた。分数も奥が深いと感じた。高校数学が楽しみです。
- ・ 今まで何となく理解していたことを, 深い理解まで持っていくことができました。

③について

- ・ 今日は今までにやったことがあった 1 次関数だったけれど難しかった。最後の問題にあんな解き方があるなんて思わなかった。楽しかったです。
- ・ 不等式を使って解く方法を学んだので, 問題が解きやすくなった。グラフを使うと分かりやすいので, セットで使えるように計算練習したい。

④について

- ・ 問題やグラフをよく見ないと大変なことになると痛感した。グラフがものを言う, の一言に尽きる。
- ・ 代入を活用して問題を解けたことに快感を覚えた。一見難しそうな問題も, 習ったことを組み合わせで解けることが嬉しかった。

甲陵高校

今年度は, 高校 1 年生と高校 3 年生の担当である。現在の高校 1 年生の内進生には, 昨年度の 2 月に, 上記の接続のテキスト⑤を行っている。ここではその接続のテキストが, 高校 1 年生の内進生にとって, 理解にどの程度役に立ったのかを述べる。

高校 1 年生の 6 月～7 月にかけて, 定数 a を含

む2次関数のグラフにおいて、定義域があるときの最大値、最小値を求める授業を行った。この問題はグラフが抽象的であり、数日で理解することは難しい。高校の数学に苦手意識を持つきっかけになり得る問題であると考え、そのため中学と高校を接続するための問題を、中学時にテキスト⑤で補ったのである。

高校1年で行う問題

$f(x)=2x^2-8ax+a+1$ ($-1 \leq x \leq 2$) について、最大値を求めよ。・・・(A)

テキスト⑤の問題

$y=-2x+5$ ($x \leq 1$) と $y=2x+1$ ($x \geq 1$) のグラフをかき、 x の変域が $a \leq x \leq a+2$ であるときの最大値を求めよ。

テキスト⑤の問題は中学3年には非常に高度であるが、中学の時点で「定数 a 」の意味の理解が少しでもついているのといないのでは、高校1年で扱う問題 (A) に対するイメージが全く異なる。今回テキスト⑤を行った生徒に対し、授業を行ったが、問題の理解が早く、深かったように感じた。また、その後に高校1年生に対して、中学時に行ったテキスト⑤をもう一度取り組んでもらった。

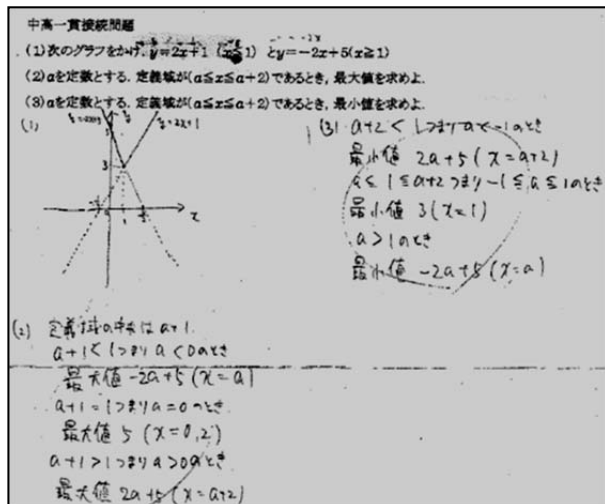


図7. 高1内進生に取り組んでもらった接続問題
 この授業後に行った生徒の感想の一部を紹介する。
 ・最小や最大を場合分けする考えは難しい。中学の時に先生が黒板でやって下さった透明シートでの場合分けの方法は分かりやすいので今でも使わ

せてもらっています。

- ・中学のときよく分からなかったことが分かるようになり、嬉しい。中学のときに1回やっていたから、より深く知ることができたと思う。
- ・なんかやっと解けた気がする！
- ・すごく面白かったです。中3の時にしっかりと理解できませんでしたが今になってみるとそんなに大したことないじゃん！って思ってしまう。中学の時にやって、なぜ自分が理解できなかったのか分かりません。

この教材は中3の段階で解けることを目標としない。上記のような感想が得られることが、この教材の真の目標である。中3の時にじっくりと思考を磨き、高校1年に進学した後に、関数の問題に対して少しでも関数の問題に対してイメージがつけばよいのである。しかし、中高接続の教材としてこれが万全であるとは限らない。今後は数学科教材の中身だけでなく、学習指導案や授業展開にも磨きをかけ、より思考の接続ができるものを考えていきたい。

5. まとめ

今年度の目標としていた、1年目にイメージした教材を具体化し、その教材を用いて授業を行うことができた。更に上記のような感想を得ることもできた。単に高校の先取りをする教材ではないため、生徒にとっては無理をせず段階を踏むことができると考える。今年度の課題として、中3で行うテキスト①～⑤を行う時期の検討が挙げられる。時期が早すぎても忘れてしまったり、難しすぎたりすると理解の助けにならないからである。実際に行うのは、中学3年生の教科書が終わった頃が良いのではないかと考える。今後は関数のテーマにとどまることなく、中高一貫教育にふさわしい数学科教材の問題を考えていきたい。

最後に、今回の研究に伴い高校1年、中学3年の担当を持つことに理解を示して下さった校長先生を始めとする先生方、2年間お世話になった大学の先生方、本当にありがとうございました。