

倍の見方を育てる学習指導

—小学校4年生のわり算の指導を通して—

M12EP012

村田利恵

1. はじめに

「平成24年度 全国学力・学習状況調査」における正答率が低かった問題に、「倍」や「割合」に関わる図1の問題がある。設問(1)は、基準量、比較量、割合を図と対応させることが求められる。その正答率は、34.3%と低いことから、場面と図とを関連付けて、二つの数量の関係を理解することに課題があると言える。一方、設問(2)は、1にあたる大きさを求めるために、除法が用いられることを理解しているかどうかを見るものであり、その正答率は41.3%であった。設問(1)よりも設問(2)の正答率が高いことから、必ずしも図が問題を解く手立てとなっているわけではないということが言える。

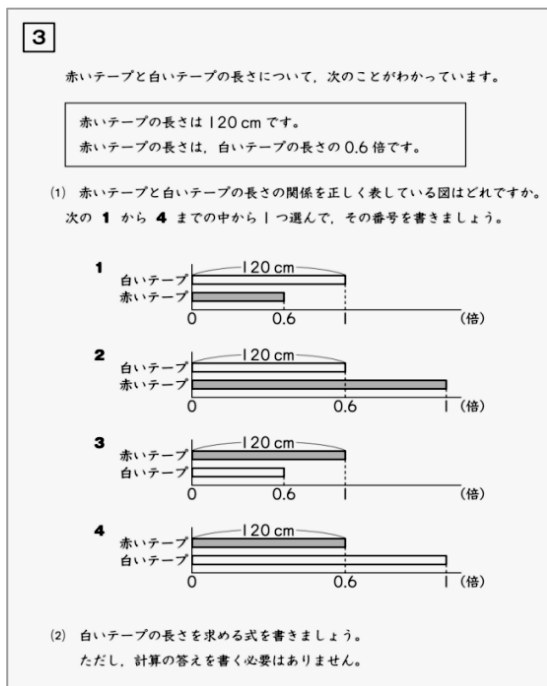


図1：平成24年度全国学力・学習状況調査 問題

2. 「倍」と「割合」の指導の課題

2.1. 乗法・除法からの「倍」のとらえ

中島(1981)によると、昭和33年の学習指

導要領改訂において「数学的な考え方」の育成という立場で考慮されたことの一つに、「比の用法、比例をとり入れたこと。これとの関連で、乗法の意味の拡張について積極的に取り上げたこと。」があるという。「比の用法」については「整数の場合を含めて、小数、分数についての乗法・除法の意味を、統一的に理解させようとしたもの」であり、「(基準とする数量) × (割合) = (割合に当たる数量) をもとにして乗法の意味を理解させることを基本」にしているという。

「倍」の意味について杉山(1986)は、「初め『2倍、3倍、……』ということの意味は、『2つ分、3つ分、……』と定義している。これは、整数の場合にのみ使うことができる表現で、小数には使えない表現である。」とし、「『倍』ということばは小数でも使えるが、それができるためには、倍を『～つ分』の言い換えのままにしておいてはならず、したがって、小数倍とはどんなことかを定義し直さなければならない。」と述べ、「『倍』ということばは乗法によく使われるが、何倍かを考える場合は除法的である。二つの量があって、一方を1と考えた時、つまり、これを単位として他方を測ったときの値が、『倍』ということばを使って表現されるものである。」としている。

小学校学習指導要領解説算数編(文部科学省)によると、4年生の除法で、「イ 除法の計算が確実にでき、それを適切に用いること。」とある。この内容『もとにする量』『比べる量』から『倍』を求める場合についても除法が活用できる、『比べる量』『倍』から、『もとにする量』を求める場合についても除法が活用できるようにする必要がある」の記述から、ここでの倍の指導が可能であると言える。

2.2. 「倍の見方」とは

「倍」の学習における「倍の見方」を次のようにとらえる。

・「倍」の2量の関係を、「基にする量を1と見ると、比較する量は何倍にあたる」として表現すること。

2.3. 「倍の見方」を育てる指導の課題

「もとにするものを1と見ると、○は～倍にあたる」という「倍の見方」を育てるためには、どのように問題構造をとらえさせたらいいのか、どのように図をかかせたらいいのか、どのように立式させたらいいのかが課題であると言える。

3. 研究の目的

「もとにする数を1と見る」という「倍の見方」を育てるために、図を用いた授業を行い、指導のあり方を考察する。

4. 研究の方法

4.1. 研究方法の全体の流れ

除法の学習の中で倍の問題を設定し、図を用いた授業実践を行う。その有効性と指導のあり方を授業改善を通して考察する。

4.2. 授業実践と改善の方法

授業実践は、実習校である県内公立A小学校4年生2クラスで行った。授業を実践し、児童の様子をみとる中で、授業改善を行った。具体的手順は、次の通りである。

- ①授業(i)…指導案をもとに授業を行った。
- ②研究会(i)…次の授業に向けて成果と課題を見出し、改善点を明らかにした。
- ③授業(ii)…改善点を踏まえた授業を行った。
- ④研究会(ii)…成果と課題・改善点を明確にし、次の授業・研究に活かす。

5. 実践授業について

5.1. 単元について

(1)単元名 「わり算の筆算(2)」

(2)本単元における「倍」についての教材観

本単元では、除数が2・3位数の場合の除法の筆算の仕方について学習する単元である。

「わり算の筆算(1)」で「もとにする数を1と見る」見方や「○は1つ分の何倍」「□を1と見たとき、○が～にあたることを表す」という「倍の見方」を学習した。除数が2位数・3位数の本単元においても、「倍の見方」を育てたい。そこで、倍の問題場面を設定した。

(3)単元の計画

- ①全16時間中の14時間を担当した。
- ②指導日は9月11日～10月2日とした。
- ③単元の計画内容は、下図の通りである。
- ④研究授業を第5次第2時とした。

第1次	何十でわる計算
第2次	2けたの数でわる筆算(1)
第3次	2けたの数でわる筆算(2)
第4次	わり算のきまり
第5次	倍の計算
第1時	「何倍か」を求める問題
第2時	「1と見る大きさ」を求める問題
第6次	まとめ

5.2. 本小単元で扱う問題について

除法では、「何倍か」(割合)を求める比(割合)の第1用法と、「1とする大きさ(もと)」を求める比(割合)の第3用法の問題場面が考えられる。第5次第1時では「何倍か」を求める問題場面を設定し、A社の教科書に掲載されている下記の問題を使用した。

トキのひなが、たまごからかえりました。
2日後の体重は50gでしたが、21日後には、950gになりました。
21日後の体重は、2日後の体重の何倍ですか。

第5次第2時の授業である本時の問題場面は、特に難しさがある「1とする大きさ(もと)」を求める問題とした。(下記は本時問題)

ひまわりが大きく育ちました。
8月の高さは、6月の高さの1.8倍で、288cmまでのびました。
6月の高さは、何cmだったのでしょうか。

5.3. 指導の手立て

(1)テープ図に数直線図を組み合わせた図

実習校使用のA社教科書「わり算の筆算(1)」で用いられる図は、図2である。

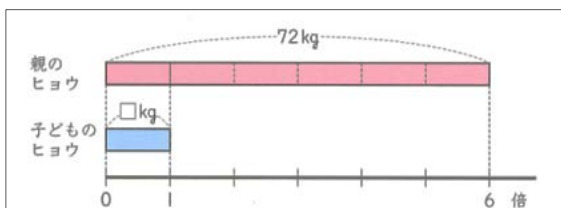


図2：A社4年上 わり算の筆算(1)

この図は、2量を2本のテープ図の長さで表す。図から□kgが「6つ分」と分かり、「6倍」や「 $\square \times 6$ 」とすることが見出せる。しかし、「□kgを1と見た時に72kgは6倍にあたる」という「倍の見方」を育てるためには、□kg、72kgの位置をはっきりさせたい。そこで、本小単元においては、この図の上にさらに1本数直線を引き、上を「量」下を「倍」とする図3を用いた。この図は、上下の関係で問題構造をとらえやすく、図から立式がしやすく、「倍の見方」を学習するためにも効果的であると考えた。また、5年生の「小数の乗法と除法」で使用する図4につながる。

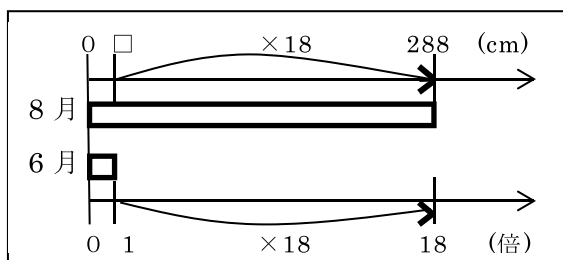


図3：本時で使用する図

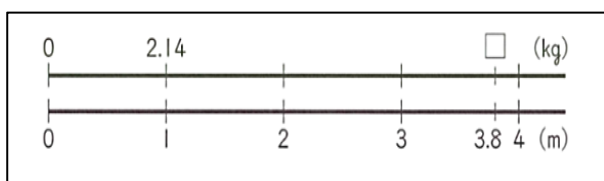


図4：5年「小数のかけ算」

(2)図を書く手順

本単元では、一般的には図を見せて示すだけであるが、図を使えるようにするために、児童に書き方の指導も行う。全国学力・学習状況調査解説資料(小学校算数)を参考に、手順として、次のように指導した。

- ①0の位置をはっきりさせるために、縦に直線を書き、0を書き入れさせる。

- ②2つの量をテープの長さで書いて表す。比べられる量(比較量)を上にもとにする量(基準量)を下に書く。
 ③テープ図の上下に、数直線を書き入れ、上の数直線を量(長さ、重さ等)として単位を書き入れ、下の数直線を倍として「倍」を書き入れる。
 ④もとの「1と見る大きさ」が何かをはっきりさせ、倍の数直線に「1と見る大きさ」(基準量)の位置に印をつけて「1」、上の数直線に印をつけてその数値を書き入れる。比べられる大きさ(比較量)も同様に、その位置に印をつけて何倍かと数値を書き入れる。
 ⑤わからない数値は、□として表す。

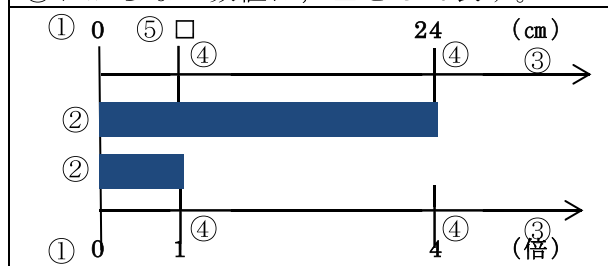


図5：図を書く手順

図を書く時は、「基準量(もとにする大きさ)」「比較量(比べられる大きさ)」「もとの1」「何倍か」の4つの数値がどこの位置に配置されるのかが重要である。

(3)立式の手順

図を用いて立式の根拠とさせるために、図に矢印を書き入れ、「倍」がかけ算になっていることを視覚的に見やすくする。このことから、図を使うとかけ算の式に表しやすいという実感を持たせたい。本時では、「 $\square \times 18 = 288$ 」としてから、「 $\square = 288 \div 18$ 」とする。

(4)「□を1と見る」見方と商の意味の理解

筆算により、「 $288 \div 18 = 16$ 」と商が出たところで、問題と図に戻り、商の意味を理解させたい。ここでは、「16cmを1と見ると、288cmは18にあたる」という見方である。この「倍の見方」に慣れさせることで、その先の小数倍への意味の拡張も考える。

5.4.第5次第1時の様子

第1時は、何倍かを求める問題であった。「 $50 \times \square = 950$ 」から、「 $\square = 950 \div 50$ 」とし、「19倍」を出した。

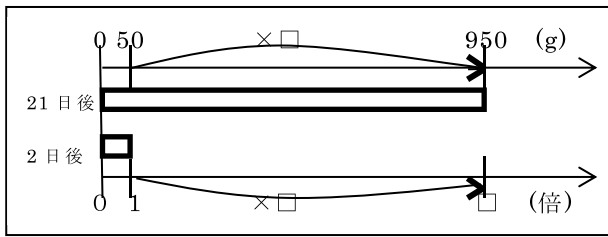


図 6：第 1 時に使用した図

6. 授業の実際と考察

6.1. A 組授業の実際

ひまわりが大きく育ちました。
8月の高さは、6月の高さの18倍で、
288cmまでのびました。
6月の高さは、何cmだったでしょうか。

- まず、問題を板書しながら児童にも一緒に書かせ、前時とは「少し違う」ことを伝えたが、違いは何かを明確にしていなかった。
- 次に、問題をはっきりさせるためにどうしたらいいか問うと、児童からは、「式、□、図」が出た。前時の図を思い出させ、0の位置の縦線だけを書いた。そして自力解決の時間をとり、児童に自分で図を書かせた。しかし、図をほとんど書けない児童の様子から、途中何度も中断しながら指導をし、数値を書き込んだ図を完成させた。

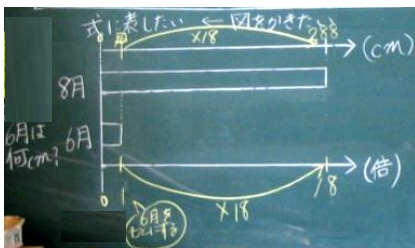


図 7
：A 組使用の図

- 次に式を考えさせると、除法の式が出てきたため板書した。その後図から読み取れる式「 $\square \times 18 = 288$ 」を出させた。(図 8 ①)
- 「 $\square \times 18 = 288$ 」から、 \square を求める式を考えさせた。児童からは、「かけ算のもと」「かけ算をしても意味がないから、わり算」「結局はわり算をする」などの考えが出た。児童の言葉を拾いながら、「 \square を出すためには反対のわり算をすればいい」と説明し、「 $288 \div 18$ 」と結びつけた。(図 8 ②)
- 筆算をして答えを出した後「出てきた答え

の確認をしてみよう」として前時の「倍の見方」である「16cmを1と見た時288cmは18にあたる」を確認した。(図 8 ③)

- 適用問題の中で前時との違いを明確にした。答えを出すところまで丁寧に指導した。

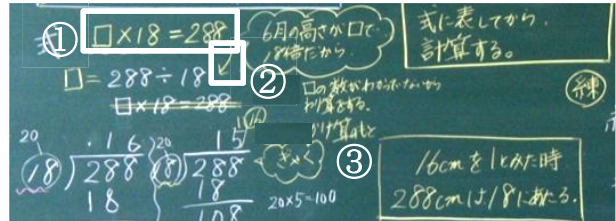


図 8

6.2. A 組授業の考察

(1)問題構造を明らかにする場面

A 組では、児童に自由に図を書かせた(授業記録 A 1 の T34)が、図を書けない児童の様子が見取れたため、自力解決を中断し、図を書く指導を順次行った。(T36・T38)

T 34：(略) じゃあ、ちょっと自分で図をかいてみましょうか。後でね、わかりにくいなあってお友達、いっしょにやるから、心配なくていいよ。さあ、じゃあ、書いてみましょう。どうぞ。
06:50<9:42> (自力解決) (…中略…)
08:25 (中断させる。)
T 36：はい、…Mさん、今、この線の横に、まず、何書いた。
C 29：8月。
T 37：うん。8月と、後何書いた。
C 30：6月。
T 38：そうだよ。Mさん、まずね、ここから書き始めてるから、この、何のものかな、つてのがわかるように、書いておくことが大事だよ。そしたら、8月のテープ図をみんなかきはじめてるから、そしたら、そこをかいて見ようね。
08:52 (続きの自力解決開始。以下同様に続いた。)

授業記録 A 1：4 年 A 組・図を書く

児童が図を書けなかった理由としては、前時の授業から三日間も立ってしまったこと、前時の指導だけでは図を書く手順が身につけていなかったということがあげられる。

また、前時は「何倍か」を求めたが、本時は「1と見る大きさ」を求めるという違いを明確にしていなかった。違いを明確にしたのは、授業の最後の適用問題の中であった。

(授業記録 A 2 の下線部分)

42:16 (適用問題をしているときに)
T 187：一個だけちょっと、確認しておこうね。

この間やった時さ、ここの倍がわからなかったでしょ。ね。だから、ここ□って書いて、ここ、×□ってやったでしょ。今日は、どこがわからない。倍がわからない。

C 155: わかる、わかる。(…中略…)

C 158: 上のものがわからない

T 192: もとのここが□になっているよね。だから、前回との違いは、そこだよ。ね。そのところにも、気を付けて。今日は、この1となるところが、□、わからないから、□としました。

授業記録 A 2: 前時との違い

そのため、前時と同じ問題であると混乱し、図の中に何か所も□を書き入れた児童が数人見られた。(図 9)

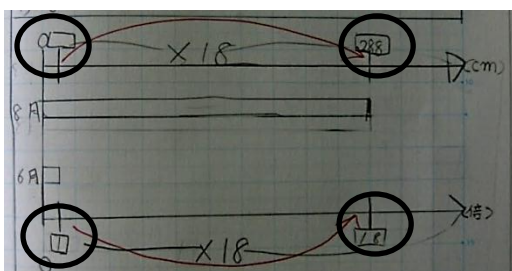


図 9: 4 つに位置に□が記述されている

(2) 立式する場面

図のよさを感じさせるため「数直線から思い浮かぶ式」を考えさせた。図の矢印や「×18」をもとにして考えられるかけ算の式「□×18=288」を思い浮かべさせたかった。しかし、どのように見えるのかは簡単に示しているだけで考えさせていない。(T 114) さらに、最後にまとめを行う中で「一度かけ算の式に表してから、わり算で考える」(T 209・T 211) ことを伝えているが、ここでもどのようにしてかけ算の式に見えるのかは、示していない。

22:45

T 101: じゃあさ、数直線を使って表すと、まず、どんな式になる。前回と同じように考えると、どんな式になりますか。(…中略…)

C 97: かけ算の

T 114: うん。そんなふうに、まずね、数直線から見える、ね、ものを、素直に表してみよう、ね、いきなり、たぶん、あの、思い浮かぶ人もいるかも知れないけど、まずは、数直線の、ね、分からない問題ちょっと、わかりやすくしようかな、そこから思い浮かぶ式を書いてみましょう。(…中略…)

46:42

T 209: (略) さあ、みなさんは、わりと、一回かけ算の式に表されなくても、わり算の式がすぐ出てきたけれども、まず、こういう問題のとき

は、一回、数直線を使って、□を使って、

C 173: □を使う計算、

T 210: そう、1 と見る大きさを求める時、

C 174: □を使う計算、

T 211: そうそうそう、□を使う計算、□を使って、一度、かけ算の式に表してみましよう。

T 212: 今日は、これが、まとめです。

授業記録 A 3: □を使ってかけ算の式に表す

(3) 倍の見方をまとめる場面

「16 を 1 と見ると 288 は 18 にあたる」を児童にも言わせながら(C 138・C 139・T 156) まとめ、ノートに書かせた。(T 157)

T 154: 16 センチメートルを 1 と見た時、(板書)

C 138: 288 は、

T 155: いいね、Jくん、288 センチメートルは、

C 139: 18 にあたる。

T 156: 18 に、あたる。この見方ができることが、

C 140: 前、前のまとめ。

T 157: そう。ね、大事です。これ、ちょっと、ちゃんと、書いておいてください。答え、6月 16 cm, A. 16cm でもいいです。と 16 cm を 1 と見たとき、288cm は、18 にあたる。これも、書いておいて下さい。

授業記録 A 4: 倍の見方

しかし、図と照らし合わせて商を解釈することはしていない。「倍の見方」を育てるために、図と照らし合わせて理解させたかった。

6.3. A 組授業から見た改善点

改善点として以下のようにまとめられた。

○改善点 1: 図・前時と本時との違い

- ・問題構造をどのように図に表すのか、図の書き方の指導をする。
- ・どの数値が□なのか、「1, 18, □, 288」の4つの値はどこに入れたらいいのか考えさせる。
- ・今何をしているのかがわかるように、前時と本時の問題の違いを明確にする。

○改善点 2: 図を根拠に立式をする。

- ・図を使ってかけ算の式を導き出す。もとの大きさ1の18倍が「 $1 \times 18 = 18$ 」だから、長さも□の18倍で、「 $\square \times 18 = 288$ 」になっていることを確認する。

○改善点 3: 倍の見方・商の解釈

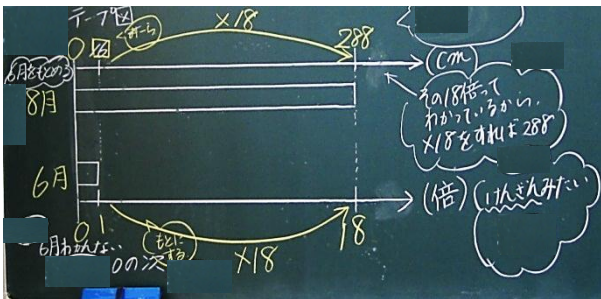
- ・本時のまとめ「1 とみた大きさを求める時にも□を使ってかけ算の式に表す」ことを理解させる。
- ・「16 を 1 と見ると、288 は 18 にあたる」を児童に言わせるだけでなく、図と照らし合わせながら理解を深める。

A 組では、実際には「倍の見方」を育てたとは言いきれない。次の B 組では上述の改善

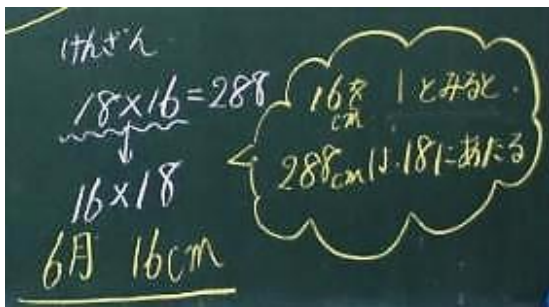
点を踏まえて授業を行った。

6.4. B組授業の実際

- まず、本時の問題を板書しながら児童にも一緒に書かせた。
- 次に、問題をわかりやすくするためにどうしたらいいか問うと、児童からは、「テープ図、数直線」が出てきた。前時に図を書いたことを思い出させ、図5の手順に従い、0の位置の縦線、8月の長さのテープ、6月の長さのテープ、上下の数直線、単位を児童と確認しながら、図を書いていった。出来上がった図に4つの数値（□、288、1、18）をどこに書き入れたらいいか考えさせた。児童の考えをもとに「6月の高さ」が「もとにする大きさの1」となることを確認した。同時に、前時の学習との違いを明確にし、どこが□になり、何を求めるのかを児童と確認していった。
- 図を使って、下の数直線が「1から18倍」になっているということから、矢印を使って考えさせ板書した。そのあとで図から見える式として $\square \times 18 = 288$ を出させた。



- $\square \times 18 = 288$ から、 \square を求める式を考えさせた。児童の「ひっくり返しただけ」「検算みたいな感じ」「18倍したから18でわる」などの言葉を拾いながら説明した。



- 「16を1と見てみよう」と「倍の見方」を思い出させ、「16cmを1と見た時288cmは18にあたる」を図を使って理解させた。
- 最後の適用問題では、縦の0の線、テープ2本、数直線上下2本だけ書いておき、その先を考えさせ、立式させて終わった。

6.5. B組授業の考察

(1) 図を書く・前時との違いを明確にする

B組の授業では、図を書く手順を初めに示し、4つの数値をどこに配置するかを問うた。前時との違いを児童に考えさせて明確にし、何を求めるのかをはっきりさせた。(授業記録B1の下線) ほぼ全員が正しく図を書けた。

- T 66 : (はじめ略) ここ、4つ、何が入るのかな。
(…中略…)
- T 72 : …ここは、わかりますか、8月のここ。
- C 67 : わかります。(…中略…)
- C 69 : 2 8 8 (…中略…)
- 13:58
- T 81 : (はじめ略) じゃあ、8月は何倍でしょうか。そして、6月は何倍でしょうか。これ、何が入る。
- C 77 : 8月は、1 8 倍。(…中略…)
- T 86 : そう。この間は、ここを一生懸命求めたんだよね。だから、ここを□にしておいたけど、今日は、もう、そうだ、1 8 倍ってかいてあるじゃん。だから、ここは、1 8 倍だ。じゃあ、今日、ここ□じゃないよ。ね。ここ、1 8 ってもうかいちゃって。
- C 84 : でも、6月が□になる。
- T 87 : そう。6月の何が□になるの。
- C 85 : 長さ。
- C 86 : 長さ。
- T 88 : そうだね。ここだね。ここが、□になる。ね。
(板書) (…中略…)
- T 89 : よし。じゃあ、6月のここは、何倍になるの。ここ。
- C 87 : 1 倍。
- C 88 : 1 倍。
- C 89 : 1 倍。
- T 90 : 1 倍。どうして、1 なんですしょうか。
- C 90 : えっとー、0の次だから。
- T 91 : 0の次だから。大事だよ。そういうことはね。
- C 91 : 1 8
- T : 他は。
- C 92 : わかった。えーと、6月をもとにするから。
(…中略…)
- T 94 : 6月の高さをもとにして、1と見るんだけど、それがわからないわけ。いい。この間は、ここ、何倍ですかっっていうのを求めたけど、今日は、この、もとにする6月の高さをわかんないから、だから、6月を求める。わかった。
(…中略…)
- C 97 : 倍。

T 96: だけれども、もとにする、1とみた大きさを求めます。
 C 98: 倍の問題です。
 T 97: そ、何倍ってものを求めるんじゃないで、1とみた大きさを求めるのが、今日。

授業記録B 1: ・図を書く・前時との違い

(2)図を根拠に立式する・図のよさの実感

B組では、矢印と「 $\times 18$ 」を書きこみ、ここからかけ算の式が見えることを児童に説明させた。これにより、「見えた、見えた。」「1かける18」など実感を持たせられた。



図10-①: かけ算の式が見えることを説明



図10-②: 別の児童に同じ事を説明させる

本時のまとめ「1とみた大きさを求める時にも□を使ってかけ算の式に表す」につながる改善がなされた。

(3)倍の見方・商の解釈

B組では、筆算から「 $288 \div 18 = 16$ 」と商16 cmが出た後に、商の意味を理解させた。「16を1と見ると、288は18にあたる」と倍の見方を学習する場面で、児童にも言わせながら図と照らし合わせ、指し示した。A組からの改善がなされた。

T 203: はい、ね、あたる。18にあたる、ってことが見えるよね。もう一回ちょっと自分の、じゃなくて、先生のこの、書いた図を見て。
16センチを、1と見ると、288が、288が、
 C 239: 18倍にあたる。(数人)
 T 204: 18にあたる、(…略…)

授業記録B 2: 倍の見方

7. 成果と課題

7.1.成果

(1)図の有用性

「倍の問題」において、図を書くことで問題構造を明らかにしたり、図を立式の根拠にして考えたり、「□を1と見ると、○は～にあたる」という「倍の見方」を育てたりした。

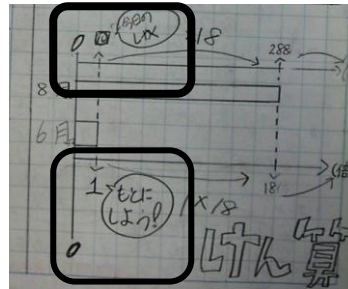


図11

図11のように、前時とは違い、本時はもとにする大きさを求めるということを理解しているということが、図の中の「今日の□」という記述から見て取れる。また、図12のように、「図を使えば見える」という記述から、図が手立てとなったことがわかる。

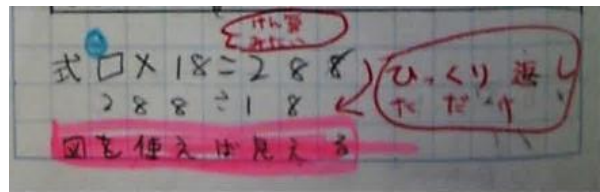


図12

授業の終わりに「先生、この図分かりやすい。」と伝えてくれた児童がいたように、学習感想の記述（学習感想の記述①下線）からも、図のよさに対する児童の思いが分かる。

○A組

- ・今日は、1と見る大きさをしました。1と見る大きさを求めるには、図が分かりやすいことが分かりました。
- ・数直線図を使うと、正確に正しく計算できるからこれからも使っていきたい。

○B組

- ・倍の計算をしました。 $\times \square$ ではなくて、 $\times 12$ とかでした。

<学習感想の記述①>

これらの児童のノート記述の様子から、問題構造の理解のために、本時で使用した図が適切であったこと、「倍の見方」を育てるため

に図からかけ算の式が見えたことなどがわかる。図が効果的であったと言える。

(2)商を理解し倍の見方を育てること

- A組
- ・今日は倍の問題をやりました。1と見る大きさを求める時、□を使ってかけ算の式に表してから計算することが分かりました。
- B組
- ・倍にはいろいろなもの求めることがあると思いました。1をもとにすることで計算しやすいと思いました。
 - ・倍の問題で、1とみた大きさを求める計算をしました。□と見てかけ算していると検算をしているんだなあと思いました。
 - ・今日は昨日とちがって倍を求める計算ではなく、1とみた大きさを求める計算をしました。昨日の計算と同じように表すことが分かりました。

<学習感想の記述②>

学習感想の記述からは、「倍の見方」をして考えようとする児童の姿が読み取れる。また、図13の児童のノートからは、既習を活かして自分なりの学びとしてとらえている様子が伺える。「倍の見方」を育てる本小単元の成果と見ることができる。

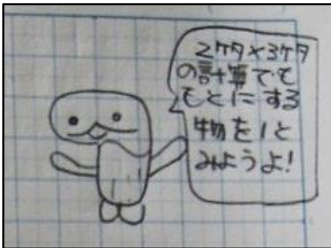


図13
(第13時ノート)

さらに、商の解釈について、B組では意識して図を使用した。そのため、図14の児童のように、「 16×18 」というかけ算の式と「16を1と見ると288cmは18にあたる」というまとめを関連させている児童の姿が見られる。

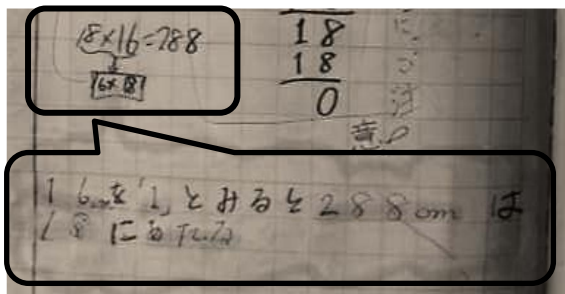


図14

7.2.課題

(1)図の利用の際に何を問うのか

授業の中で、いつでも倍が□だと考えている児童がいた。問題構造の理解のために図を使用する際には、4つの数値の位置に焦点化して考えさせる必要があるとわかった。また、図を使わなくても除法と立式できる児童もいた。なぜ除法の式と判断できたのかを追求することで、児童同士の学びが生まれる。

このことから、何を問うのかを教師が明確にしておかなければならないと感じた。

(2)小数倍や小数の乗法とのつながり

本小単元を通して、テープ図と数直線図を組み合わせた図が、「倍の見方」を理解させるために効果的であることがわかった。そこで、本研究を「整数÷整数=小数(小数倍)」の指導につなげていきたい。

8. おわりに

倍の問題は難しい。しかし、「図で表す」ことや「もとの数を1と見る」を繰り返し指導することに、「倍の見方」を育てる有効性を感じた。また、同じ授業での授業改善は、容易にはできない。今後は1時間を意識して、模擬授業を含めた授業改善を行っていきたい。

9. ◇引用・参考文献

- ・藤井斉亮他(2010). 新編新しい算数4年上・下. 東京書籍
- ・国立教育政策研究所教育課程研究センター(2011). 評価基準の作成, 評価方法等の工夫改善のための参考資料(小学校 算数)
- ・国立教育政策研究所教育課程研究センター(2012). 平成24年度全国学力・学習状況調査解説資料 小学校算数. PP.24-27
- ・文部科学省(2008). 小学校学習指導要領解説算数編. 東洋館出版社. PP.119-121
- ・中島健三(1981). 算数・数学教育と数学的な考え方 その進展のための考察. 金子書房 PP.33-34
- ・杉山吉茂(1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版社 PP.222-224
- ・杉山吉茂(2012). 「倍と割合ー倍がわかれば、割合もわかる?ー」. 算数授業研究 VOL.83. 算数授業論究Ⅲ 東洋館出版社
- ・鈴木和幸(2011). 数直線を活用した小数の乗除法の指導. 山梨大学教職大学院