# 数学的な思考力・表現力を育てるための授業改善

## －算数的活動を通して－

M13EP011
横山　淳一

### 1. はじめに

算数科において数学的な思考力・表現力を育てることが重視されている。これまでの経験から児童の実態として，立式や答えを導き出すことができても，その根拠を明らかにしたり，筋道立てて説明したりすることに課題があることを感じていた。しかし，その原因は，筆者の授業において，一方的に与えた問題を考えさせ，教師が教えやすい考えを中心に扱い，説明してしまうことが多かったことが考えられる。数学的な思考力・表現力を育てる授業ができていなかったのである。

算数科の目標に「算数的活動を通して…」とあるように，数学的な思考力・表現力の育成は算数的活動を通して行われる。

向山・廣田(2009)は，数学的な思考力・表現力を育てる算数的活動として，「目的意識をもって主体的に取り組む活動」，「数学的な思考・表現を伴う活動」，「数学的な表現を使いながら考えを説明したり，意見交換をしたりする活動」の三つをあげ，これらを図１のように整理している。

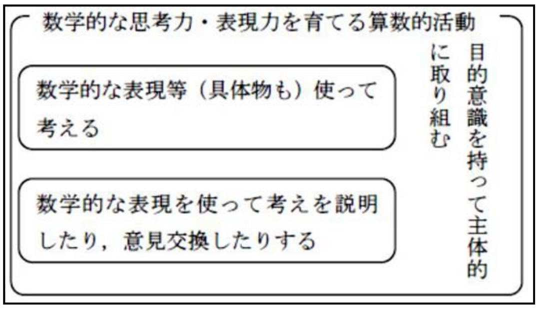


**図 1　数学的な思考力・表現力を育てる算数的活動（向山・廣田，2009）**

この図から思考・表現する際に児童が目的意識を持って主体的に取り組むことが前提となっていることが分かる。

「目的意識」とはその課題を解決する必然性であると考える。よって，教師から一方的に学習課題を与えているだけでは必然性を持たせることはできない。「主体的」とは学習指導要領解説(文部科学省, 2008)によると「新たな性質や考え方を見いだそうとしたり，具体的な課題を解決しようとしたりすること」である。しかし，児童は何もないところから新たな性質や考え方を見いだすのではない。既習事項と関連させて思考して課題を解決し，既習の言葉を使って表現していくのである。

数学的な思考力・表現力を育てるためには目的意識を持たせるための課題提示の工夫や既習事項を意識した算数的活動を通した授業展開が重要であると考えた。

### 2. 研究の目的

本研究は，数学的な思考力・表現力を育てるために，目的意識を持たせるための課題提示の工夫や既習事項を意識した算数的活動を通した授業を実践し，その考察を通して授業改善につなげていくことを目的とする。

### 3. 研究の内容

#### 3·1 授業実践について

授業実践は所属校である山梨県内の公立小学校５年生（２０名）で行った。

#### 3·2 授業実践の内容

・教材研究を行い，授業案を考える。
・板書や授業記録などから授業分析を行い，成果と課題を明らかにすること。
・児童の発言や学習感想，適用問題から児童

の思考・表現をみとること。

以上の３点を丁寧に行い，次時以降への授業改善につなげていく。

## 4. 授業実践①について

### 4･1 単元について

**(1)単元名**　「図形の角」

**(2)単元の指導計画（全８時間）**

| | | |
|---|---|---|
| 第一次 | 第１，２時 | 三角形の内角の和 |
| | 第３，４時 | 四角形の内角の和 |
| | 第５時 | 多角形の内角の和 |
| 第二次 | 第１，２時 | 四角形の敷き詰め |
| | 第３時 | まとめ |

**(3)本時の目標（第一次・第３時）**

三角形の内角の和を基にして，四角形の内角の和の求め方を演繹的に考え，説明する。

### 4･2 授業の実際と考察

**(1)課題把握場面の実際と考察**

①課題把握場面の実際

はじめに前時の学習感想を紹介した。その中から学習感想①を取り上げ，本時の学習課題を「四角形の４つの角の大きさの和は何度になるのかな。」とした。

> ３つをたせば，180°になるという三角形のきまりを見つけた。それなら，四角形の４つの角をたしたらいくつになるか知りたい。

**学習感想①**

その後，プロトコル①のように展開し，「どんな四角形でも 4 つの角の和は 360°になるか調べよう。」を本時のめあてとし，本時で使用する四角形（図２）を提示して自力解決に取り組ませた。

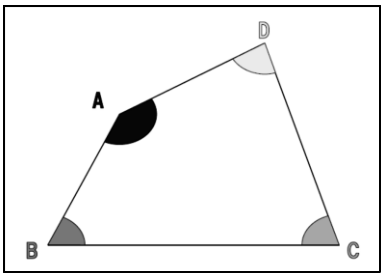


**図 2　本時で扱った四角形**

【プロトコル①】

**T1：四角形の４つの角の和って何度くらいになりそう？**

C1：360°

C2：同じです。

**T2：理由は？**

C1：えーと，正方形は角が全部直角だから，たすと 360°になる。

T3：他の理由ある。正方形だって。

**C3：でも，平行四辺形でやったら 360°になるのかなって。**

T4：なるほど。とりあえず，正方形なら 4 つの角は何？

C4：直角。

**T5：直角って何度ですか。**

C5：90°

T6：だから

C6：360°

**T7：式で言うと？**

C7：90×4。

T8：正方形が 360°なら，他には？

C8：長方形。

**T9：じゃあ，他の四角形も 360°？**

**C3：限らない。平行四辺形とかは 360°とは限らない。**

**T10：**これ（正方形と長方形）は 360°。**360°じゃない四角形もあると思う？**

C10：あると思う。

T11：あると思う人？（5 名ほど挙手）

T12：ないと思う人？（2 名ほど挙手）

T13：やっぱり調べなきゃ分からない人？

**T14：**じゃあ，今日はこの四角形を使って，**どんな四角形でも 4 つの角の和は 360°になるか調べよう。**

②課題把握場面の考察

a. 学習感想からの課題設定

児童の「それなら，四角形の４つの角をたしたらいくつになるか知りたい。」という学習感想には本時への目的意識が表れている。また，三角形の内角の和が 180°であることを「三角形のきまりをみつけた。」と表現し，四角形の４つの角にも「きまり」があるのではないだろうかと主体的に考えようとしていることも読み取れる。教師が一方的に課題を与えるのではなく，この学習感想をきっかけに

することで，児童にとって必然性のある課題となったのではないかと考える。

b. 目的意識を持たせるための教師の問い

まず，T1「四角形の４つの角の和って何度くらいになりそう？」と問い，答えの予想をさせた。次に 360°という予想に対して，T2「理由は？」と根拠を問い，C1 児はその根拠を説明した。さらに，T9「じゃあ，他の四角形も 360°？」で一般性を問い，C3 児の発言を取り上げ，T10「360°じゃない四角形もあると思う。」と全体に問うた。それによって，T14「どんな四角形でも 4 つの角の和は 360°になるか調べよう。」という児童にとってのめあてをつくっていくことができた。

c. ねらいに迫るための問いと展開

「平行四辺形とかは 360°とは限らない。」と発言した C3 児や 360°にならない四角形もあるかもしれないと挙手をした児童がいたことから，本時の課題を解決しようという目的意識を持つことのできたことが分かる。

しかし,「どんな四角形でも」を意識させるために, 360°にならないと考えた根拠を問うたり，他に 360°にならない四角形はどんな四角形があるかを問うたりする必要があった。

また，指導案にとらわれずに，提示した四角形だけでなく，平行四辺形や「360°にならない四角形もあるかもしれない。」とした児童が考えた四角形も使って自力解決に取り組ませることも必要であった。

**(2) 自力解決**

自力解決では何も手がつけられない児童はいなかった。しかし，19 名のうち 17 名が分度器を使って提示した四角形の 4 つの角を測り，足して 360°とする方法をとっていた。

前時の学習感想では「三角形の内角の和は 180°である。」ことを書いていた児童がほとんどであった。そのため，本時でも三角形の内角の和を既習事項として使って解決していけるだろうと予想し，解決の方法の見通しを問い，共有することはしなかった。しかし，角度を調べるために分度器を使うということは児童にとって自然な思考である。その考え方を認めながらも，演繹的に考えさせために は，解決の方法の見通しを持たせることが必要であった。

**(3) 比較検討場面の実際と考察**

①比較検討場面の実際

自力解決で分度器を使って測った児童がほとんどであったので，まずこの考えを取り上げ 360°になることを確認した。その後，三角形の内角の和を根拠に考えた B 児の考えを取り上げ，図に補助線を入れさせて，プロトコル②のように展開し，演繹的な考え方を解釈していった。

【プロトコル②】

T1：B さん，この続き，思いついた？
C1：(うなずく)
T2：みんなどう？何したの？
C2：対角線をかいた。
**T3：対角線ってどんな線だっけ？**
C3：頂点と頂点を結ぶ。
**T4：この後どう考えたのかな？**
**T5：ちょっとだけ時間をとるから隣の人と相談してごらん。**
**(一分ほどペアで話し合う)**
T6：ちょっとなんとなく見えてきたっていう人？360°が。いるね。
**T7：対角線を引いたことでこの中に何が見える？**
C4：三角形。
**T8：いくつ？**
C5：2 つ。
T9：このあと（手を挙げた児童は）何に気づいたんだろう？
T10：三角形 2 つに 360°が見える？うなづいている人がいるね。
**T11:途中まででもいいから B さん。何かヒントになることが言える？**
C1：(黒板の) 一番最初に書いてあること。
T12：具体的に言ってみて。
C1：どんな三角形でも 3 つの角の和は 180°。

T13：これを使ったってこと？
T14：そろそろ続きをいえるかな？C さん。
**C6：どんな三角形でも 3 つの角の和は 180°だから，2 つの三角形，180°が 2 つあるから 180＋180。**

②比較検討場面の考察

a.演繹的な思考を共有するための働きかけ

分度器を使って 360°になることが分かった児童にとって，「他に方法があるかな。」と問うても新たな方法を考える必然性がなく，演繹的な考えにはたどりつくことができない。そこで，演繹的に考えた B 児に対角線だけを引かせ,全体にT4「この後どう考えたのかな？」と問うた。すぐに反応した児童が少なかったので T5 でペアで話し合うように指示をした。補助線を引いたことが解決の見通しとなり，図を指しながら隣同士で話し合い，続きを考えることができた。

解決の方法の全てを考えさせるのではなく，あるところまでを示して，その続きを考えさせたり，思考させる焦点を絞ってペアで話し合ったりさせることが，一度解決ができたことに対して新たな方法を考えさせる時に有効に働くことが分かった。

b.数学的な思考・表現につなげる教師の問い

ペアでの話し合いを全体で共有してくために，T7，T8，T11 のように問いを細かくつなげていった。それによって C6 のように言葉と式を使って説明をすることができた。

しかし，さらに表現を深めていくために別の児童にもう一度言わせたり，図と対応させながら説明させたりすることが必要であった。また，課題把握場面で C 児が例に挙げた平行四辺形を取り上げて,「同じことが言えるか。」と一般性を問うことで「どんな四角形でも」をより意識させることができたと考える。

## 5. 授業実践②について

### 5･1 単元について

**(1)単元名**　「四角形と三角形の面積」

**(2)単元の指導計画（全 14 時間）**

| | | |
|---|---|---|
| 第一次 | 第１，２時 | 平行四辺形・三角形の面積の求め方 |
| 第二次 | 第１～３時 | 平行四辺形の求積 |
| 第三次 | 第１～３時 | 三角形の求積 |
| 第四次 | 第１，２時 | 台形の体積の求め方 |
| | 第３時 | ひし形の面積の求め方 |
| | 第４時 | まとめ |

**(3)本時の目標（全 14 時間・第四次第 1 時）**

台形の面積の求め方を既習の図形に帰着して考え，説明することができる。

**(4)実践①の課題をふまえた授業改善**

本単元では平行四辺形や三角形，台形の面積の求め方を既習の図形に帰着させて考え，説明したり公式をつくり出したりすることや，その過程で筋道を立てて考える力の育成を図ることをねらいとしている。

実践①でほとんどの児童が分度器で測定し，四角形を敷き詰める，角を切って敷き詰めるなどの考えは出てこなかった。このことから実践①の前時で三角形の内角の和を調べるときに，分度器で測って確かめる以外の，敷き詰めて確かめるなどの算数的活動が不十分であったといえる。そこで，本単元で既習事項を使っていけるように，第１・２時で次のような活動を行った。

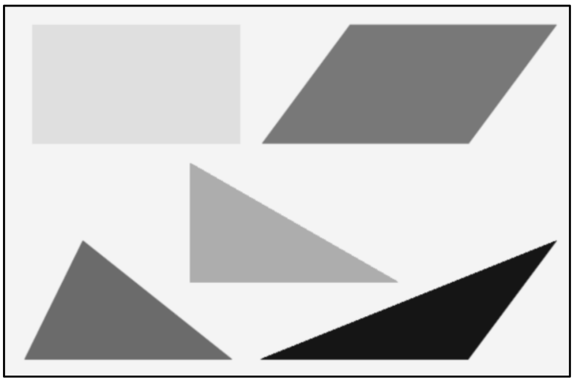

**図 3　第 1 時提示の図形**

第 1 時のはじめに図 3 のように 5 つの数値を示さない図形を提示し,「面積が求められるのはどの図形ですか。」と問うた。まず，既習

の長方形の面積は求められることを確認した。次に直角三角形を取り上げた。ここでは倍積と等積変形（図４）の２つの考え方を取り上げ，どのように考えたのかと問い，全体で解釈をし，操作をしながら確認をしていった。

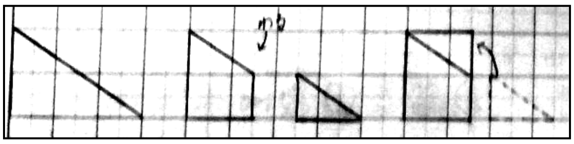

図 4　等積変形

また，等積変形の操作を行っていたときに，長方形に直せない児童が数名出てきた。そこで，長方形に直せた図形と直せなかった図形を比較させた。それによって長方形に直せなかった児童は三角形の底辺にあたる部分を適当な長さで切っていたことを発見させた。こうした既習の面積の求め方に帰着させる算数的活動を十分に行ってから，実際に数値を示して面積を求め，公式をつくり出していくようにした。

### 5･2 授業の実際と考察

**(1)課題把握の場面の実際と考察**

①課題把握の場面の実際

前時の学習感想に「これまで学習した面積の求め方を使うと他にどんな図形の面積が求められそうか。」ということを書かせた。五角形や六角形，ひし形，台形など様々な図形が挙げられていた。しかし,「台形は分からない。」と書いた学習感想②があったのでそれを取り上げて，台形の面積を求めていくことを本時の課題とした。

| |
|---|
| ひし形は長方形や平行四辺形になおすことができそう。でも台形は分からない。 |

**学習感想②(B 児)**

次に,「台形のままで求められそうかな？」と問い，図５のような解決の方法を発表させることで見通しを持たせることができた。そして,「これまで学習した面積の求め方が使えるか？」を本時のめあてとして，自力解決に取り組ませた。

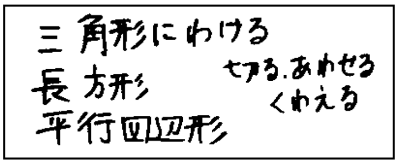


**図 5　本時の見通し(板書)**

②課題把握の場面の考察

a. 目的意識の顕在化

「台形は分からない。」と書いたＢ児の学習感想から，次の時間はこれを確かめてみたいという目的意識を持つことができているととらえることができる。この学習感想から課題を設定することで，台形の面積は求められると考えた児童は自分の考えを証明しようという目的意識を持てたのではないかと考える。

b. 解決の方法の見通しを持たせる

Ｂ 児と同じように考えていた児童には，自力解決の前に「どんな形に直せそうか。」「どんな方法で形を変えるか。」と問い，解決の方法の見通しを持たせることで，どの方法ならできそうだろうかという目的意識をもつことができたのではないかと考える。

**(2)自力解決**

**表１　自力解決での児童の様子**

（児童数 19 名　人数はのべ人数）

| | 帰着した図形 | 求積 | 人数 |
|---|---|---|---|
| ① | 長方形（倍積） | ○ | 3 |
| ② | 長方形（等積） | ○ | 1 |
| ③ | 長方形（ないものを加える） | ○ | 1 |
| ④ | 平行四辺形（倍積） | ○ | 5 |
| ⑤ | 平行四辺形（等積） | ○ | 1 |
| ⑥ | 三角形に分ける | ○ | 3 |
| ⑦ | 三角形と四角形に分ける。 | ○ | 1 |
| ⑧ | 長方形（ないものを加える） | × | 1 |
| ⑨ | 平行四辺形（倍積） | × | 2 |
| ⑩ | 困っている，書いていない | × | 5 |

１９名中１１名の児童が既習の図形に帰着

させて面積を求め，３名は既習の図形をみつけるところまでできている。また，帰着した図形も様々で，第１，２時の算数的活動や既習の図形に帰着して考えさせてきたことの成果であるといえる。

しかし，手のつかなかった５名の児童に対して，折ったり切ったりなどの実際の操作ができる台形を用意しておくべきであった。

**(3)比較検討の場面の実際と考察**

①比較検討場面の実際

はじめに長方形に帰着した３つの考え方(表１①（図６)，②，③)を扱った。

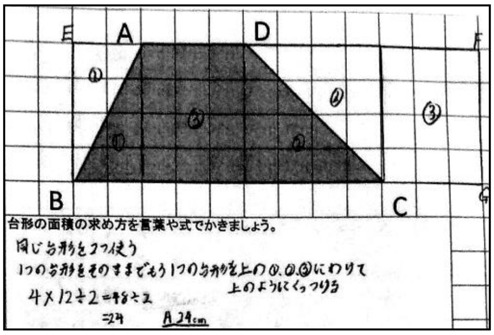


**図 6　長方形に帰着した考え(倍積)**

３つの長方形の考えを全員で解釈し，次に平行四辺形(図７)の考えを取り上げた。

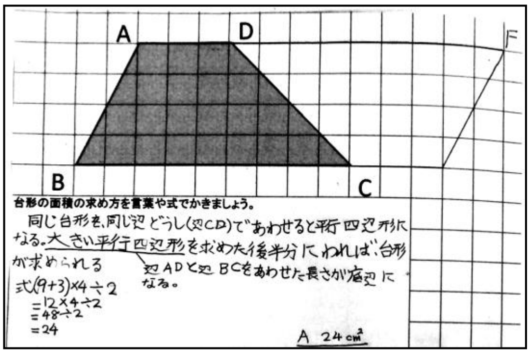


**図 7　平行四辺形に帰着した考え**

図に補助線をいれてもらい，プロトコル③のように展開した。

【プロトコル③】
<u>**T1：どういうふうに平行四辺形にしたの？**</u>
C1：もう一個付けくわえた。
C2：同じ台形を付け加えた。
<u>**T2：どういうふうに付け加えた？**</u>
C3：同じ長さの辺のところをつけた。
<u>**T3：向きはどうなってる？**</u>
C4：逆にしてる。
T4：これで平行四辺形 ABDF ができた。この後どうする？
C5：…
<u>**T6：（長方形の）どの考えと同じかな？**</u>
C6：C 児（図６）と同じ。
<u>**T7：ということはどうするの？**</u>
C8：半分にする。
T8：そうだね。半分にしてるね。

次に三角形を使った考え方として図８・９を取り上げた。平行四辺形と同様に図に補助線をいれさせ，プロトコル④のように展開した。

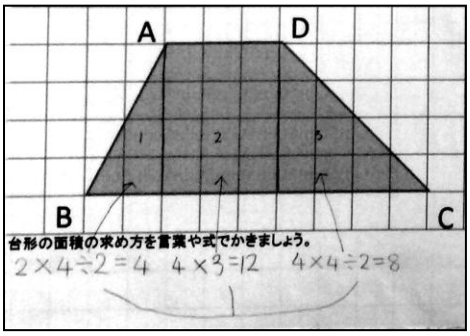


**図 8　三角形と長方形に帰着した考え**

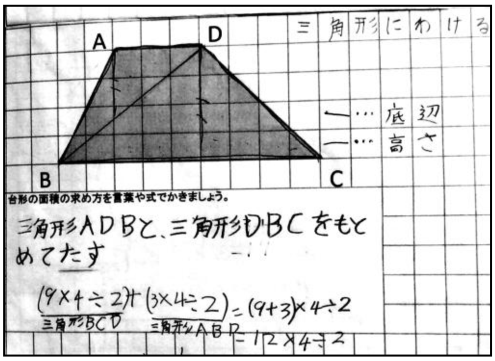


**図 9　三角形に帰着した考え**

【プロトコル④】
T9：これ（図８）はどういう風に考えたの？どこに三角形がある？
C9：辺 DC のところと…
T10：じゃあ，記号入れるね。
（点 E，F を加える。）

C10：三角形 CDF。
T11：他には？
C11：三角形 ABE。
T12：三角形 CDF と三角形 ABE。あと何がありますか？
C12：長方形。
C13：長方形 AEFD。
**T13：この後どうする？**○○さん（自力解決で補助線だけ引くことができた児童）どう？
C14：…
**T14：だれか助けてもらえるかな？**
C15：2 つの三角形と長方形の面積を求めた後，それぞれの答えを足す。
**T15：なんかちょっと似ているのない？**
C16：○○さん（図６）。
**T17：①②③だけを足すと同じだね。**
T18：もう一つはこんな方法(図８)です。何と何に分けたの？
C17：三角形 ABD と BCD
**T19：次どうする？分けた後に…**
C18：答えをたす。
T20：黒板にある言葉で言える？
C19:面積を求めた後,それぞれの答えをたす。
**T21：どっちも分けてたす方法が使えるんだね。**
T20：こういう風に考えると，台形の公式はまだ知らないけど面積が求められそうだね。

②比較検討場面の考察

予定では平行四辺形から取り上げるつもりであったが，はじめに長方形に帰着した考えを取り上げげた。理由は長方形からはじめた児童が多かったことと，倍積，等積変形，ないところに加える，という３つのやり方が出ていたからである。加えて平行四辺形と三角形に帰着する考えも解釈し，それぞれの共通点や相違点を問うことでより思考や表現が深まっていくと考えた。

a.数学的な思考・表現につなげる問い

平行四辺形の解釈では，T1「どういうふうに平行四辺形にしたの？」，T2「どういうふうに付け加えた？」，T3「向きはどうなってる？」のように台形を平行四辺形に帰着させるための方法や T6「(長方形の) どの考えと同じかな？」，T7「ということはどうするの？」のように長方形の考えと比較させるための問いをつなげながら解釈していくことができた。

また，三角形の考えの解釈でも T13「この後どうする？」，T19 「次どうする？分けた後に…」，T20「黒板にある言葉で言える？」のように児童に問いながら解釈させていくことができた。

しかし，T17「①②③だけを足すと同じだね。」や T21「どっちも分けてたす方法が使えるんだね」と説明をしてしまっているところがある。ここでは共通点を問い，思考を深めていくことが必要であったと考える。

### (4)まとめの場面

①まとめの場面の実際

適用問題では言葉を読んで図に補助線を入れる問題（平行四辺形に帰着する）と補助線の入った図を見て説明する問題（図１０）の２問を扱った。

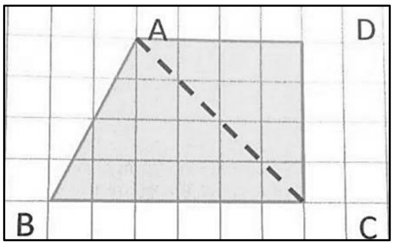


**図 10　適用問題**

自力解決で手がつかなかった５名のうち，全員が補助線をいれることができた。また，図１０の適用問題は４名が以下のように記入をした。

・**台形 ABCD を 2 つに分けると，三角形ができる**から，三角形の面積を求めて，2 つの三角形の面積をたせば求められる。
・台形 ABCD に**線を引いて**，三角形が二つできるから，三角形の面積を求めてたす。
・**線を入れて**，三角形が２つできた。三角形の面積が底辺×高さ÷２です。２つの三角形の面積をたす。
・２つの三角形に分けた

また，学習感想には次のような記述がみられた。

・最初は台形は求められないかなと思っていたけど，**自分でも習ったことを使い求めることができた。**(B 児)
・台形を三角形でやってみたら，**(これは，習ったな)と思いました。**
・私は長方形に直してやったけど，式が難しくてできませんでした。**でも〇〇くんの方法で分かりました。**

**学習感想③**

②まとめの場面の考察

a.数学的な表現の高まり

本時では多様な考えに触れ，思考表現をさせていくことができた。その結果，適用問題でほとんどの児童が補助線を引いたり，図と対応させながら言葉で表現したりすることができた。また，自力解決で手がつかなかった児童も，比較検討場面で友だちの考えを解釈していくことによって，自分なりの言葉で表現することができるようになっている。

さらに，「台形 ABCD を２つに分けると，三角形ができる」に対し，「どのように分けるの？」とか「線を引いて，線を入れて」に対し，「どのような線を？」とコメントを返すことで数学的な表現をより洗練させていくことができると考える。

b.学習感想

また，学習感想をみると，既習の図形に帰着することのよさを実感できたことや，他の児童の考えを解釈することで，自分の課題を解決できたことが分かる。

## 6. 授業実践のまとめ

２つの実践を通して，児童に目的意識を持たせるために，学習感想をきっかけに学習問題を提示した。それによって，友だちの考えを知り，自分の考えと比較しながら目的意識を持って課題に取り組むことができたと考えられる。

また，主体的に取り組ませるためには，既習事項など課題解決のための道具が必要である。そのために実践②では既習事項を意識させるための算数的活動を行った。また，実践①では問わなかった解決の方法の見通しを実践②で問うた。既習事項を用いて児童が数学的な思考・表現を進めていくためには，教師が既習事項を意識させて働きかけが重要であることが分かった。

今後更なる授業改善を行っていくためには比較検討場面を「数学的な表現を使いながら考えを説明したり，意見交換をしたりする活動」に高めていくための教師の問いが非常に重要となると考える。その視点で本実践のプロトコルや今年度の実践を振り返ってみると，全体への問いにならないことや教師と児童の一対一のやり取りになってしまうことあった。また，児童の不十分な発言に対して，すぐに説明を加えたり，言い直したりすることも多い。「他の言い方ができるかな？」や「(別の児童に)もう一度説明してみて。」など全体への問いを意識していくことが今後の課題である。

## 7. 引用･参考文献


・文部科学省（2008）小学校学習指導要領解説算数編
・筑波大学附属小学校算数部（2011）「新版　小学校算数　板書で見る全単元・全時間の授業のすべて　５年下」　東洋館出版社
・向山宣義・廣田敬一（2009）「算数的活動で子どもの思考力・表現力を育てる」　明治図書　pp13-14